

۱- با توجه به مجموعه‌های زیر کدام گزینه صحیح است؟

$$A = \{\emptyset, \{0\}, \{1, 5\}\}$$

$$B = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \dots, \{10\}\}$$

$$C = \{\{\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \dots\}$$

$$\{2\} \notin C - 3 \in B - \emptyset \in A \quad (۱)$$

$$\{1, 2\} \in C - \{1, 2\} \notin B - 0 \in A \quad (۲)$$

$$\{1, 2, 3, \dots, 10\} \in C - \{1, 2, 3\} \notin B - \{1\} \notin A \quad (۳)$$

$$\{\} \notin C - \{1, 2, 3, \dots, 10\} \in B - 1 \notin A \quad (۴)$$

$$A = \left\{ \frac{\sqrt{16-a^2}}{\sqrt{a-1}} \mid a \in \mathbb{Z} \right\}$$

۲- حاصل ضرب عضوهای غیرصفر مجموعه A چند است؟

$$\sqrt{42} \quad (۲)$$

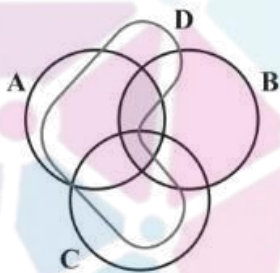
$$\frac{7}{2} \quad (۱)$$

$$\frac{\sqrt{21}}{2} \quad (۴)$$

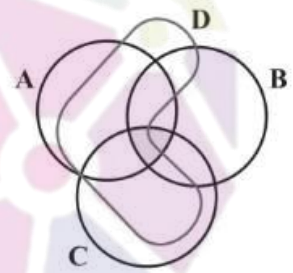
$$\sqrt{12} \quad (۳)$$

۳- مجموعه‌های A, B, C و D به ترتیب مجموعه مضرب‌های ۲, ۳, ۴ و ۵ هستند. کدام گزینه به درستی مجموعه تمام مضارب ۶ را

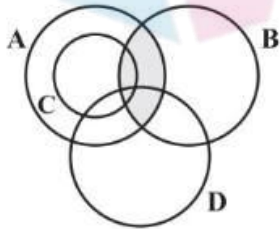
نشان می‌دهد؟



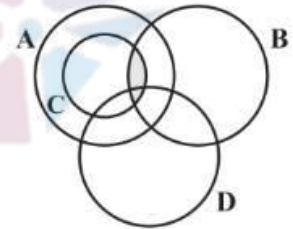
(۲)



(۱)



(۴)



(۳)

۴- مجموعه $A = \{-1, y+1, -2, -8, 2x, z\}$ دارای ۸ زیرمجموعه است. آن‌گاه بیشترین مقدار $x+y+z$ برابر کدام گزینه است؟

$$-11 \quad (۴)$$

$$-4/5 \quad (۳)$$

$$-3/5 \quad (۲)$$

$$-8 \quad (۱)$$

۵- اگر مجموعه مقسوم‌علیه‌های صحیح عدد ۴ باشد، حاصل ضرب همه اعضای همه زیرمجموعه‌های A برابر کدام گزینه است؟

$$2^{72} \quad (۴)$$

$$2^{64} \quad (۳)$$

$$2^{192} \quad (۲)$$

$$2^{36} \quad (۱)$$

۶- در چند زیرمجموعه از مجموعه $A = \{2, 3, 4, 6, 7, 8\}$ ، مجموع کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین عضو، برابر 10 می‌باشد؟

$$32 \quad (۴)$$

$$40 \quad (۳)$$

$$42 \quad (۲)$$

$$9 \quad (۱)$$

۷- اگر $A = \{1, 2, 3\}$ و $B = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ و مجموعه C طوری باشد که $A \subseteq C \subseteq B$ و $n(C) = 5$ ، برای مجموعه C چند

حالت وجود دارد؟

$$15 \quad (۴)$$

$$21 \quad (۳)$$

$$7 \quad (۲)$$

$$4 \quad (۱)$$

۸- زیرمجموعه‌های مجموعه $A = \{\sqrt{1-x} \mid x \in \mathbb{Z}, x^2 \leq 9\}$ را در مجموعه‌ای به نام B قرار داده‌ایم. اگر $B \subseteq C$ و $C \subseteq B$ باشد،

تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه C کدام است؟

۲۳۶ (۴)

۲۳۲ (۳)

۲۲۴ (۲)

۲۵ (۱)

۹- نمایش ریاضی $\left\{\frac{4}{5}, \frac{8}{7}, \frac{12}{9}, \dots\right\}$ کدام است؟

(۲) $\left\{\frac{2x}{2x+1} \mid x \in \mathbb{N}, x > 1\right\}$

(۴) $\left\{\frac{3x+1}{2x+3} \mid x \in \mathbb{N}\right\}$

(۱) $\left\{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{N}, a = b - 1\right\}$

(۳) $\left\{\frac{4x}{2x+3} \mid x \in \mathbb{Z}, x - 2 \geq -1\right\}$

۱۰- نمایش ریاضی مجموعه $M = \{1, 11, 111, 1111, \dots\}$ کدام است؟

(۲) $\left\{\frac{10^x - 1}{9} \mid x \in \mathbb{N}\right\}$

(۴) $\{11^x - 1 \mid x \in \mathbb{W}\}$

(۱) $\{11^x \mid x \in \mathbb{W}\}$

(۳) $\{10^x + 1 \mid x \in \mathbb{W}\}$



هوش‌شانند

سرزمین تیزهوشان ایران

۱- گزینه ۳ بررسی سایر گزینه‌ها:

$$\{1\} \in C(4)$$

$$0 \notin A(2)$$

$$2 \notin B(1)$$

۲- گزینه ۲ ابتدا عضوهای مجموعه A را به دست می‌آوریم.

اگر a برابر یک یا کوچک‌تر از آن باشد $\sqrt{a-1}$ جواب نخواهد داشت و اگر a از ۴ بزرگ‌تر باشد آن‌گاه $\sqrt{16-a^2}$ جواب خواهد داشت پس با شرط $a \in \mathbb{Z}$:

$$A = \{\sqrt{12}, \sqrt{\frac{y}{2}}, 0\} \Rightarrow \sqrt{12} \times \sqrt{\frac{y}{2}} = \sqrt{\frac{12 \times y}{2}} = \sqrt{6y}$$

۳- گزینه ۴ مجموعه C زیرمجموعه A می‌باشد. چون هر مضرب ۴ مضرب ۲ نیز می‌باشد. پس یکی از گزینه‌های (۳) یا (۴) درست هستند. برخی مضرب‌های ۶، مضرب ۴ نیستند و مضرب ۲ هستند، بنابراین شکل گزینه (۳) ناقص است.

۴- گزینه ۲ از آنجایی که تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه A برابر ۸ می‌باشد، پس $n(A) = 3$ است. بنابراین:

$$A = \{-1, -2, -8, y+1, 2x, z\} = \{-1, -2, -8\}$$

برای آن که $x+y+z$ بیشترین مقدار باشد باید x, y, z بیشترین مقدار باشد:

$$y+1=2x=z=-1 \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = -2 \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow x+y+z = -\frac{y}{2} = -3/5$$

$$A = \{\pm 1, \pm 2, \pm 4\} \rightarrow \text{تعداد زیرمجموعه‌های } A = 2^3 = 8$$

نکته: هر عضو یک مجموعه در نیمی از زیرمجموعه‌ها وجود دارد، یعنی هر کدام از عضوهای A، ۳۲ بار مشاهده می‌شود بنابراین:

$$\begin{aligned} \text{حاصل ضرب همه اعضای زیرمجموعه‌های } A &= (-1)^{32} \times (1)^{32} \times (-2)^{32} \times 2^{32} \times (-4)^{32} \times (4)^{32} \\ &= (-1 \times 1 \times -2 \times 2 \times -4 \times 4)^{32} \\ &= (-64)^{32} = (-2^6)^{32} = 2^{192} \end{aligned}$$

۶- گزینه ۲ مجموعه «۲ و ۸»، «۳ و ۷» و «۴ و ۶» برابر 1^0 خواهد شد. بنابراین باید عددهای بین این دو عددها را به صورت اختیاری جایگذاری کنیم.

$$\left. \begin{array}{l} \{2, \underbrace{-, -, -, -, -}_5, 8\} \Rightarrow 2^5 = 32 \\ \{3, \underbrace{-, -, -, -}_3, 7\} \Rightarrow 2^3 = 8 \\ \{4, \underbrace{-, -}_1, 6\} \Rightarrow 2^1 = 2 \end{array} \right\} 32 + 8 + 2 = 42$$

نکته: دقت کنید ۵ عدد بین ۲ و ۸ به صورت اختیاری انتخاب می‌شوند پس تعداد حالت‌ها برابر تعداد زیرمجموعه‌هایی است که می‌توان از آن ۵ عدد نوشت. به همین ترتیب همین کار را برای دو عدد ۳ و ۷ و همچنین ۴ و ۶ انجام می‌دهیم.

۷- گزینه ۳ از آنجایی که $A \subseteq C$ است، پس مجموعه C حتماً باید $\{1, 2, 3\}$ را داشته باشد و چون $C \subseteq B$ پس عضوهای $\{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ عضوهای اختیاری آن می‌باشند و از آنجایی که $n(C) = 5$ است، پس مجموعه C دو عدد اختیاری می‌تواند از مجموعه $\{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ انتخاب کند، یعنی زیرمجموعه‌های دو عضوی از این مجموعه را می‌تواند اختیار کند.
پس کافی است تعداد زیرمجموعه‌های ۲ عضوی این مجموعه را به دست آوریم:

$$\text{حالت } \frac{7 \times 6}{2} = 21 \Rightarrow \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

$$A = \{\sqrt{1-x} \mid x \in \mathbb{Z}, x^2 \leq 9\}$$

۸- گزینه ۳ ابتدا عضوهای مجموعه A را به دست می‌آوریم.

از آنجا که $x^2 \leq 9$ است، آن‌گاه $-3 \leq x \leq 3$ می‌باشد.

$$x = -3 \Rightarrow \sqrt{1-(-3)} = \sqrt{4} = 2$$

$$x = -2 \Rightarrow \sqrt{1-(-2)} = \sqrt{3}$$

$$x = -1 \Rightarrow \sqrt{1-(-1)} = \sqrt{2} \Rightarrow A = \{2, \sqrt{3}, \sqrt{2}, 1, 0\}$$

$$x = 0 \Rightarrow \sqrt{1-0} = \sqrt{1} = 1$$

$$x = 1 \Rightarrow \sqrt{1-1} = \sqrt{0} = 0$$

پس $n(A) = 5$ و تعداد زیرمجموعه‌های A برابر 2^5 می‌باشد و مجموعه B شامل $2^5 = 32$ عضو است. حال از آنجا که $C \subseteq B$ و $B \subseteq C$ است پس دو مجموعه B و C برابرند و $n(C) = 32$ و تعداد زیرمجموعه‌هایش برابر 2^{32} می‌باشد.

۹- گزینه ۳

هوش‌شانند

۱۰- گزینه ۲

سرزمین تیزهوشان ایران