اعداد گویا

به تقسیم هر عدد صحیح به هر عدد صحیح غیرصفر، عدد گویا می‌گویند؛ پس نمایش ریاضی مجموعه اعداد گویا را می‌شود این‌طوری نوشت:

$\{\frac{a}{b} | a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}\}$ یا $\{\frac{a}{b} | a, b \in \mathbb{Z}, b \neq ۰\}$

چند نکتهٔ ساده در مورد اعداد گویا را با هم بررسی می‌کنیم:

۱) تمام اعداد صحیح، عدد گویا هم هستند؛ مثلاً $۵ = \frac{۵}{۱}$، $۰ = \frac{۰}{۱}$.

۲) هر عدد گویا را با کسرهای مختلفی می‌شود نشان داد: $\frac{۲}{۵} = \frac{-۴}{-۱۰} = \frac{۶}{۱۵} = \cdots$

۳) به کسرهایی با صورت و مخرج عدد صحیح که شمارندهٔ مشترک (غیر از ۱) نداشته باشند، کسر **تحویل‌ناپذیر** می‌گویند؛ مثل $\frac{۲}{۵}$، $-\frac{۳}{۷}$ و $-\frac{۱۰}{۱۱}$.

مرتض

تست: اگر $\frac{۱۴}{۴۹}=\frac{a}{b}$ و نیز بدانیم که کسر $\frac{\frac{a}{۳}}{\frac{b}{۳}}$ تحویل‌ناپذیر است، حاصل $a-b$ کدام است؟

۱) -۱۲ ۲) -۱۵ ۳) -۱۸ ۴) -۲۱

$\frac{a}{b}=\frac{۱۴}{۴۹}=\frac{۲}{۷}$ $\left(\frac{a}{۳},\frac{b}{۳}\right)=۱$ $(a,b)=۳$

$\frac{a}{b}=\frac{۲}{۷}=\frac{۶}{۲۱}$ $\left.\begin{array}{l}a=۶\\b=۲۱\end{array}\right\} a-b=۶-۲۱=-۱۵$

مرتضی طاهری

یکی از مسئله‌های مرسوم در مورد اعداد گویا این است که چه‌طور می‌شود اعدادی را بین دو عدد **گویای معلوم** پیدا کرد. ما سه روش را معرفی می‌کنیم.

البته از این تکنیک‌ها برای مقایسهٔ کسرها هم می‌شود کمک گرفت.

① **مخرج مشترک:** فرض کنید می‌خواهیم بین دو کسر $\frac{۱}{۶}$ و $\frac{۱}{۲}$ چند عدد گویا پیدا کنیم:

$$\frac{۱}{۲}=\frac{۶}{۱۲},\ \frac{۱}{۶}=\frac{۲}{۱۲}\Rightarrow\frac{۱}{۶}<\frac{۳}{۱۲},\frac{۴}{۱۲},\frac{۵}{۱۲}<\frac{۱}{۲}$$

اگر به کسرهای بیشتری نیاز داشتیم، کسرها را با مخرج مشترک بزرگ‌تری می‌نویسیم.

② **میانگین:** میانگین هر دو عدد، حتماً بین آن دو عدد است:

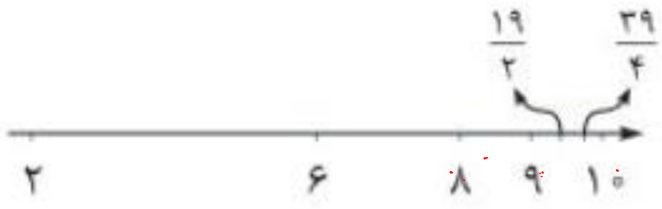
$$a\le\frac{a+b}{۲}\le b$$

$$\frac{۱}{۶}<\frac{\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۲}}{۲}<\frac{۱}{۲}$$

تذکر: با این روش (و روش بعد) می‌شود نشان داد که بین هر دو عدد گویا، بی‌شمار عدد گویای دیگر وجود دارد، به طور مثال می‌خواهیم بین اعداد ۲ و ۱۰، پنج عدد گویا پیدا کنیم.

$$1)\ \frac{2+10}{2}=6\ ,\ 2)\ \frac{6+10}{2}=8\ ,\ 3)\ \frac{8+10}{2}=9$$

$$4)\ \frac{9+10}{2}=\frac{19}{2}\ ,\ 5)\ \frac{\frac{19}{2}+10}{2}=\frac{39}{4}$$



۳) حالت کلی‌تر: رابطهٔ زیر با شرط صفرنبودن مخرج‌ها، همواره برقرار است:

$$\frac{a}{b}\le\frac{a+c}{b+d}\le\frac{c}{d}$$

به طور مثال $\frac{7}{11}$ بین $\frac{3}{8}$ و $\frac{4}{3}$ است:

$$\frac{3}{8}<\frac{4+3}{3+8}=\frac{7}{11}<\frac{4}{3}$$

از این روش‌ها به صورت خاص، تست زیادی مطرح نمی‌شود، به همین خاطر ما می‌رویم سراغ تست‌های ترکیبی مقایسهٔ کسرها:

تست: به ازای کدام مقدار k، کسر $\frac{۷}{k-۱}$ بین دو عدد گویای $\frac{۱}{۶}$ و $\frac{۳}{۸}$ قرار دارد؟ $(k \in \mathbb{N})$ (تیزهوشان)

۱) ۱۶ ۲) ۱۸ ۳) ۱۹ ۴) ۲۵

$\frac{3}{8} = \frac{9}{24}$

$\frac{1}{6} = \frac{4}{24}$

$\frac{4}{24} \quad \frac{5}{24} \quad \frac{6}{24} \quad \boxed{\frac{7}{24}} \quad \frac{8}{24} \quad \frac{9}{24}$

$\frac{1}{6}$

$\frac{4}{24} \quad \boxed{\frac{7}{24}} \quad \frac{3}{8}$

تست: اگر a، b و c سه عدد طبیعی باشند و $a < b$ باشد، کدام کسر حتماً از $\frac{a}{b}$ بزرگ‌تر است؟ (تیزهوشان)

$۱ < ۲$

۱) $\frac{a-c}{b-c}$ ۲) $\frac{a+c}{b+c}$ ۳) $\frac{a \times c}{b+c}$ ۴) $\frac{a+c}{b \times c}$

$a=۱ , b=۲ , c=۱ \rightarrow \frac{a}{b} = \frac{۱}{۲} \;,\; \frac{a-c}{b-c} = \frac{۰}{۱} = ۰$

$a=۲ , b=۳ , c=٤ \rightarrow \frac{a}{b} = \frac{۲}{۳} \;,\; \frac{a+c}{b \times c} = \frac{۶}{۱۲}$

مرتضی طاهری

نکته:

① اگر کسر $\frac{a}{b}$ بین صفر و یک باشد $(0<\frac{a}{b}<1)$، با اضافه‌کردن مقدار ثابت مثبتی $(c>0)$ به صورت و مخرج، کسر بزرگ‌تر می‌شود و به یک نزدیک‌تر خواهد شد: $0<\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+c}<1$

② اگر کسر $\frac{a}{b}$ بزرگ‌تر از یک باشد $(1<\frac{a}{b})$، با اضافه‌کردن مقدار ثابت مثبتی $(c>0)$ به صورت و مخرج، کسر کوچک‌تر می‌شود و باز هم به یک نزدیک‌تر خواهد شد: $1<\frac{a+c}{b+c}<\frac{a}{b}$

تست: حاصل عبارت $A = \dfrac{\overbrace{۲\times۴\times۸}^{a}+\overbrace{۴۴۴\times۸۸۸\times۱۷۷۶}^{c}+۸۸۸\times۱۷۷۶\times۳۵۵۲}{\underbrace{۱\times۲\times۴}_{b}+\underbrace{۲۲۲\times۴۴۴\times۸۸۸}_{d}+۴۴۴\times۸۸۸\times۱۷۷۶}$ برابر است با: (تیزهوشان)

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۲

$\frac{a}{b}=8 \qquad \frac{c}{d}=8 \qquad \frac{e}{f}=8$

$\frac{a+c+e}{b+d+f}=8$

مرتضی طاهری

نکتهٔ واجب: اگر $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}=k$، آن‌گاه $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}=k$.

$$\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{3}{6}=\frac{5}{10}$$

کسرهای مسلسل

در تست بعدی، مؤلف تا توانسته کسر در کسر آورده! به این‌طور کسرها می‌گوییم **کسرهای مسلسل**. منظورمان هم این است که کسرها سلسله‌وار آمده‌اند و تکرار شده‌اند.

تست: حاصل $\cfrac{2+\cfrac{2+\cfrac{2+1}{1}}{1}}{2-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{2-1}}}\div 2$ برابر با کدام گزینه است؟ (علامه طباطبایی)

۱) ۷ ۲) $\frac{2}{7}$ ۳) $\frac{1}{7}$ ۴) $\frac{7}{2}$

$\frac{7}{1} \div 2 = \frac{7}{2}$

تست: با توجه به $A = 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cdots}}}$ کدام گزینه دقیق‌تر است؟

۱) A عددی صحیح است.
۲) A عددی گویا است.
۳) $A=\frac{\sqrt{2}}{2}$
۴) $A=\sqrt{2}$

$B-1=\sqrt{2} \rightarrow B=\sqrt{2}+1$

$A=1+\frac{1}{\sqrt{2}+1} \rightarrow A=\frac{\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}+1}\times\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1}=\frac{\cancel{2}+\sqrt{2}\cancel{-2}}{2-1}$

$B=2+\cfrac{1}{\underbrace{2+\cfrac{1}{2+\cdots}}_{B}} \rightarrow B=2+\frac{1}{B} \xrightarrow{\times B} B^2=2B+1$

$B^2-2B-1=0$

$B^2-2B+1=+2 \rightarrow (B-1)^2=2 \rightarrow$

$A=1+\frac{1}{\ldots}$

مرتضی طاهری