محاسبهٔ احتمال (هم‌شانس)

احتمال این‌که پیشامد A رخ دهد (یعنی جواب آزمایش که حتماً یکی از اعضای S هست، عضو A هم باشد)، برابر است با:

$$\text{احتمال رخ‌دادن پیشامد A} = \frac{\text{تعداد عضوهای A}}{\text{تعداد عضوهای S}} \xrightarrow{\text{به زبان ریاضی}} P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

تذکر: حواستان جمع باشد که احتمال رخ‌دادن پیشامد $\varnothing$ می‌شود $\frac{0}{n(S)} = 0$ و احتمال رخ‌دادن پیشامد S برابر $\frac{n(S)}{n(S)} = 1$ $(n(S) \neq 0)$ است.

هم‌چنین باقی احتمال‌ها باید عددی بین صفر و یک شوند: $0 \leq P(A) \leq 1$.

هوشلند

مرتضی طاهری

تست: در جعبه‌ای ۱۲ مهرهٔ قرمز و تعدادی مهرهٔ آبی وجود دارد. اگر احتمال آمدن مهرهٔ قرمز $\frac{۲}{۳}$ برابر احتمال آمدن مهرهٔ آبی باشد، تعداد کل مهره‌ها چندتا است؟

۱) ۳۰ ۲) ۳۶ ۳) ۲۴ ۴) ۴۲

آبی	۳	۱۸
قرمز	۲	۱۲
کل	۵	۳۰

۱۲ = قرمز

n = آبی

هوشلند

مرتضی طاهری

تست: اگر یک سکه را سه بار بیندازیم، چه‌قدر احتمال دارد که فقط یک بار «رو» بیاید؟

۱) $\frac{۱}{۸}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۳}{۸}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

$۲^۳ = ۸$ تعداد کل حالات

حالات مطلوب ← ۳ حالت ← (ر، خ، خ) (خ، ر، خ) (خ، خ، ر)

$\frac{۳}{۸}$

هوشلند

تست: در پرتاب دو تاس، احتمال آن‌که حاصل‌ضرب دو عددی که تاس‌ها نشان می‌دهند عددی فرد باشد، کدام است؟ (تیزهوشان)

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۵}$

تعداد حالات کل = تعداد حالات تاس اول × تعداد حالات تاس دوم

$۶ \times ۶ = ۳۶$

تعداد حالات مطلوب = تعداد حالات تاس اول × تعداد حالات تاس دوم

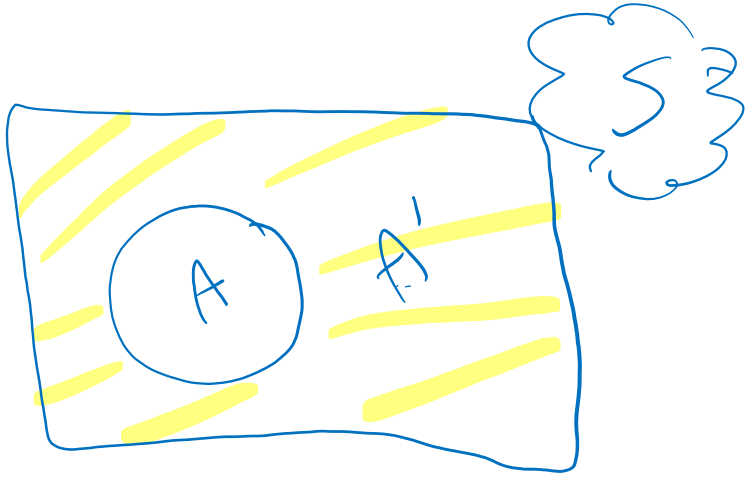
$۳ \times ۳ = ۹$

$\frac{۹}{۳۶} = \frac{۱}{۴}$

مرتضی طاهری

نکته: برای هر پیشامد تصادفی، می‌توان نوشت:

$$P(A)+P(A')=۱ \Rightarrow P(A)=۱-P(A')$$



$$P(A') = 1 - P(A)$$

هوشلند

مرتضی طاهری

تست: ده زوج جوان که هر کدام یک فرزند پسر و یک فرزند دختر دارند، در همایش «خیلی‌سبزترین» خانوادهٔ سال شرکت کرده‌اند. قرار است از هر خانواده یکی از فرزندان برای جایزه‌گرفتن انتخاب شود. چه‌قدر احتمال دارد که حداقل دو تا از جایزه‌ها به پسرها برسد؟

۱) $\frac{11}{1024}$ ۲) $\frac{17}{1024}$ ۳) $\frac{1007}{1024}$ ۴) $\frac{1013}{1024}$

A: پیشامد اینکه هر کدام از ۲ جایزه به پسرها

A': پیشامد اینکه به یکی از پسرها هیچ کدام از پسرها (هر کدام یکی از پسرها)

تعداد کل حالات $= 2 \times 2 \times 2 \times \cdots \times 2 = 2^{10} = 1024$

یک پسر 10 + هیچ پسری 1 $= 11$ $\rightsquigarrow$ $P(A') = \frac{11}{1024}$ $\rightarrow$ $P(A) = 1 - \frac{11}{1024}$

مرتضی طاهری

تست: می‌خواهیم از جمع ۴۰ نفرهٔ تست قبلی، سه نفر را انتخاب کنیم. چه‌قدر احتمال دارد که یکی از این سه نفر خانم (مادر یا دختر) و دوتای دیگر آقا (پدر یا پسر) باشند؟

۱) $\frac{۷}{۱۳}$
۲) $\frac{۵}{۱۳}$
۳) ۰/۴
۴) ۰/۳

$\frac{۲۰ \times ۱۰ \times ۱۹}{۲۰ \times ۱۴ \times ۳۹} = \frac{۵}{۱۳}$

انتخاب k تا از n تا

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \times (n-k)!}$

$n! = n \times (n-1) \times \cdots \times ۱$

$۵! = ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱$

حالات کل

$\binom{۴۰}{۳} = \frac{۴۰!}{۳! \times ۳۷!} = \frac{۴۰ \times ۳۹ \times ۳۸ \times ۳۷!}{۳ \times ۲ \times ۱ \times ۳۷!} = ۲۰ \times ۱۳ \times ۳۸$

$\binom{۲۰}{۱} = ۲۰$

$\binom{۲۰}{۲} = \frac{۲۰ \times ۱۹}{۲} = ۱۰ \times ۱۹$

مرتضی طاهری

تست: در جعبه‌ای سه مهرهٔ سفید، چهار مهرهٔ قرمز و پنج مهرهٔ آبی وجود دارد. اگر دو مهره به تصادف برداریم و مطمئن باشیم که هیچ‌کدام سفید نیست، چه‌قدر احتمال دارد که هر دو هم‌رنگ باشند؟

۱) $\frac{5}{12}$ ۲) $\frac{7}{12}$ ۳) $\frac{5}{9}$ ۴) $\frac{4}{9}$

$\frac{16}{36} = \frac{4}{9}$

$\binom{n}{2} = \frac{n \times (n-1)}{2}$

* زمانی که چیزی قطعی معلوم شد، حذف کن

آدم سفیدی نباشه ← $5+4=9$

$\binom{9}{2} = \frac{9 \times 8}{2} = 36$ کل حالات

$\binom{4}{2} = \frac{4 \times 3}{2} = 6$ دو تا قرمز

$\binom{5}{2} = \frac{5 \times 4}{2} = 10$ دو تا آبی

حالات مطلوب $= 10 + 6 = 16$

مرتضی طاهری

ترکیب پیشامدها: اگر A و B پیشامدهای تصادفی از فضای نمونهٔ S باشند، با ترکیب A و B پیشامدهای دیگری به وجود می‌آید که خیلی برای طراحان سؤال و تست‌های تیزهوشان جذاب است. ما یکی‌یکی آن‌ها را بررسی می‌کنیم:

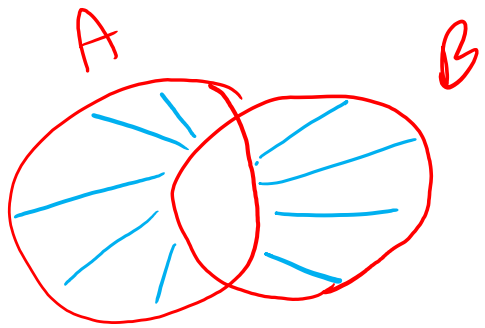
الف) پیشامد $A \cap B$: رخ‌دادن این پیشامد یعنی رخ‌دادن هم‌زمان A و B.

ب) پیشامد $A \cup B$: اگر حداقل یکی از A یا B رخ دهد، می‌گوییم $A \cup B$ رخ داده است.

پ) پیشامد $A - B$: این پیشامد وقتی رخ می‌دهد که A رخ دهد ولی B رخ ندهد.

ت) پیشامد $A \Delta B$: این پیشامد یعنی دقیقاً یکی از A یا B رخ دهد (هر دوتایشان رخ ندهند.)

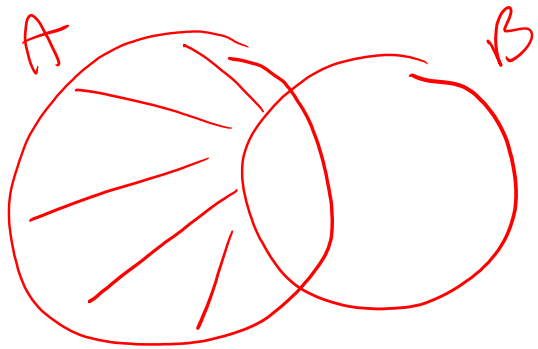
به عبارت دیگر «A رخ دهد و B رخ ندهد» یا «A رخ ندهد و B رخ دهد». این رابطه که یادتان هست؟ $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$



نکته: از روابطی که در قسمت مجموعه‌ها یاد گرفتیم، تساوی‌های زیر نتیجه می‌شود:

① $P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$

② $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$



مرتضی طاهری

نکتهٔ تکمیلی: اگر برای دو پیشامد A و B داشته باشیم $P(A\cap B)=P(A).P(B)$، آن‌گاه به پیشامدهای A و B مستقل از هم گفته می‌شود. در واقع اگر رخ‌دادن A و B تأثیری روی هم نداشته باشد، برای محاسبهٔ $P(A\cap B)$ می‌توان $P(A).P(B)$ را حساب کرد.

دو پیشامد مستقل: به هم ربطی ندارن

دو پیشامد ناسازگار: اتفاق افتادن با هم ندارند

هوشلند

مرتضی طاهری

تست: یک تاس را ۵ بار می‌اندازیم. چه‌قدر احتمال دارد که دفعهٔ اول ۶ و دفعهٔ سوم عدد فرد بیاید؟

۱) $\frac{۱}{۱۲}$ ۲) $\frac{۱}{۶}$ ۳) $\frac{۱}{۲۴}$ ۴) $\frac{۱}{۸}$

دفعه اول ۶ — دفعه سوم فرد

$\frac{۱}{۶} \times \frac{۳}{۶} = \frac{۳}{۳۶} = \frac{۱}{۱۲}$

هوشلند

مرتضی طاهری

تست: در ظرفی ۴ مهرهٔ سفید، ۵ مهرهٔ سیاه و ۱ مهرهٔ سبز موجود است. در ظرف دیگر ۶ مهرهٔ سفید و ۲ مهرهٔ سبز قرار دارد. به تصادف از هر ظرف یک مهره بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال رنگ این دو مهره یکسان است؟

۱) $\frac{۱۹}{۴۰}$ ۲) $\frac{۲۱}{۴۰}$ ۳) $\frac{۱۳}{۴۰}$ ۴) $\frac{۲۷}{۴۰}$

هوشلند

تست: در جعبه‌ای ۵ مهرهٔ قرمز و ۴ مهرهٔ آبی وجود دارد. می‌خواهیم به نوبت ۲ مهره را بدون جای‌گذاری از جعبه خارج کنیم. چه‌قدر احتمال دارد که اولی قرمز و دومی آبی بیاید؟

۱) $\frac{۵}{۹} \times \frac{۴}{۹}$

۲) $\frac{۱}{۵} \times \frac{۱}{۴}$

۳) $\frac{۵}{۹} + \frac{۴}{۹}$

۴) $\frac{۵}{۹} \times \frac{۱}{۲}$

مرتضی طاهری

فضای نمونهٔ پیوسته

الف) یک‌بعدی: فرض کنید می‌خواهیم یک عدد حقیقی دلخواه از مجموعهٔ $\{x \in \mathbb{R} \mid ۰ < x < ۱۰\}$ انتخاب کنیم. چه‌قدر احتمال دارد که این عدد بزرگ‌تر از ۸ باشد؟

معلوم است که هم فضای نمونه و هم حالت‌های مطلوب نامتناهی‌اند؛ پس رابطهٔ $\frac{n(A)}{n(S)}$ بی‌معنی است.

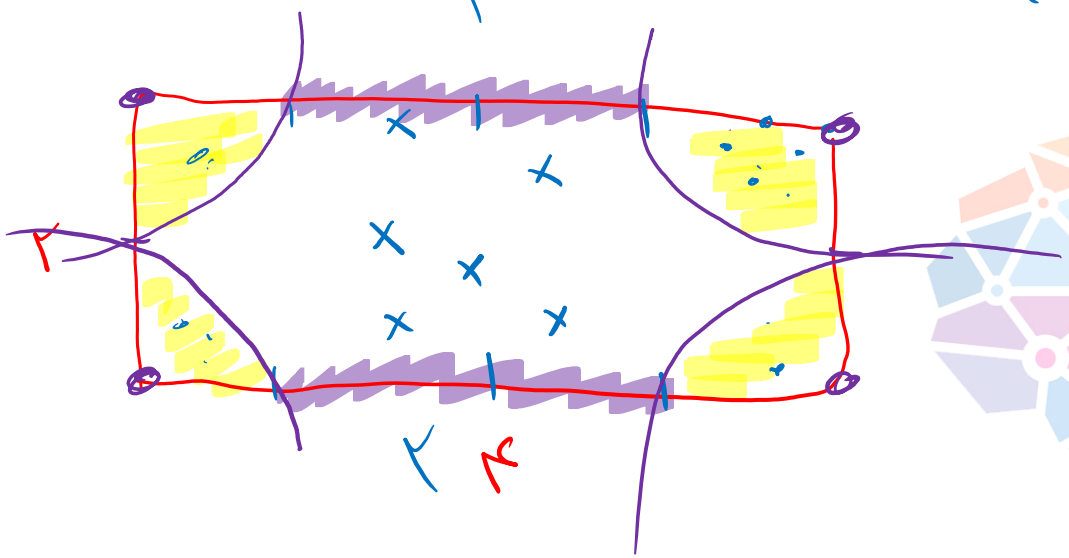
در این‌طور مسائل یک بُعدی، باید برویم سراغ طول مجموعه‌ها:

$$P(A) = \frac{\ell(A)}{\ell(S)} = \frac{۲}{۱۰} = \frac{۱}{۵}$$

تست: اگر نقطه‌ای به تصادف روی مستطیل ۴×۲ انتخاب کنیم، چه‌قدر احتمال دارد که فاصلهٔ این نقطه از تمام رأس‌ها بیشتر از ۱ باشد؟

۱) $\frac{۱}{۵}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

فضای نمونه: محیط مستطیل = ۱۲



$\frac{۴}{۱۲} = \frac{۱}{۳}$

هوشلند

مرتضی طاهری