



هوشلند

اعمال بین مجموعه‌ها

الف) اشتراک دو مجموعه

اشتراک دو مجموعه A و B ، یعنی مجموعه‌ای که شامل تمام عضوهای مشترک A و B است. این مجموعه را به صورت $A \cap B$ نشان می‌دهند. به طور

$$A \cap B = \{3, 4\}$$

مثال اگر $A = \{1, 2, 3, 4\}$ و $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ باشند، آن وقت:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ و } x \in B\}$$

اشتراک دو مجموعه را به صورت ریاضی این‌طور نشان می‌دهند:



هوش‌لند

مرتضی طاهری



ب) اجتماع دو مجموعه

اجتماع دو مجموعه A و B ، یعنی مجموعه‌ای که شامل تمام عضوهای A و B است. این مجموعه را به صورت $A \cup B$ نشان می‌دهند:

$$\begin{cases} A = \{1, 2, 3, 4\} \\ B = \{3, 4, 5, 6, 7\} \end{cases} \Rightarrow A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

در واقع فقط اعضایی که حداقل عضو یکی از مجموعه‌های A یا B باشند، باید در مجموعه $A \cup B$ عضو باشند. نمایش ریاضی آن به شکل زیر است:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ یا } x \in B\}$$

کم کم داریم وارد جبر مجموعه‌ها می‌شویم. نکته‌های زیر را خیلی خیلی با دقت بخوانید:



نکته واجب:

$$A \cap A = A \cup A = A, \quad A \cap \emptyset = \emptyset, \quad A \cup \emptyset = A$$

$$(A \cap B) \subset A, \quad (A \cap B) \subset B$$

$$A \subset (A \cup B), \quad B \subset (A \cup B)$$

۱ برای هر مجموعه‌ای به نام A داریم:

۲ اشتراک دو مجموعه حتماً زیرمجموعه آن دو مجموعه است:

۳ هر دو مجموعه دلخواه، حتماً زیرمجموعه اجتماعشان هستند:

۴ اگر $A \subset B$ آن گاه $A \cap B = A$ و $A \cup B = B$.

تست: کدام یک از تساوی‌های زیر نادرست است؟

$$A \cup (A \cap B) = A \quad (۱)$$

$$(A \cap B) \cap (A \cup B) = A \cap B \quad (۳)$$

$$A \cap (A \cup B) = A \quad (۲)$$

$$(A \cap B) \cup (B \cup A) = A \quad (۴)$$



نکته تکمیلی: تساوی‌های زیر همواره برقرار است:

① $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$: توزیع پذیری اشتراک روی اجتماع

② $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$: توزیع پذیری اجتماع روی اشتراک



پ) تفاضل دو مجموعه

مجموعه $A - B$ (A منهای B) شامل همهٔ عضوهای A است که عضو B نباشند. مثلاً اگر $A = \{1, 2, 3, 4\}$ و $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ باشند

$$A - B = \{x \mid x \in A, x \notin B\} = \{1, 2\}$$

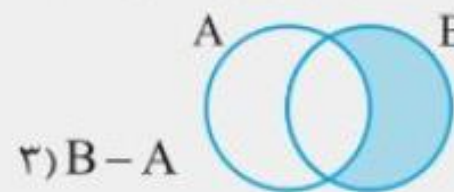
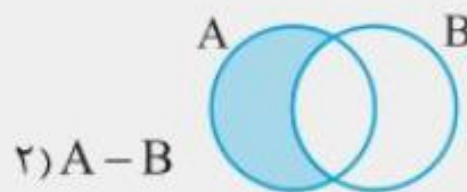
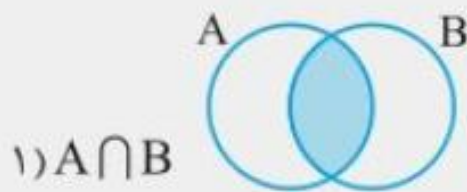
آن وقت:

$$B - A = \{x \mid x \in B, x \notin A\} = \{5, 6, 7\}$$

تذکر: طبق تعریف، برای هر مجموعه دلخواه A می شود نوشت: $A - \emptyset = A$ و $\emptyset - A = \emptyset$.

در مثال زیر، می خواهیم اجتماع، اشتراک و تفاضل مجموعه ها را روی نمودار ون نشان دهیم:

مثال: در هر مورد رابطهٔ جبری نوشته شده را در نمودار ون رنگ زده ایم:



نکته واجب: از مثال بالا می توان تساوی های زیر را نتیجه گرفت:

$$① A = (A - B) \cup (A \cap B)$$

$$② B = (B - A) \cup (A \cap B)$$

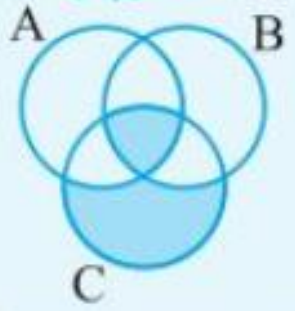
$$③ A \cup B = A \cup (B - A)$$

$$④ A \cup B = B \cup (A - B)$$





تست: اگر $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ و $B = \{2, 4, 7\}$ و $C = \{1, 2, 7, 8\}$ باشند، مجموع مقادیر در قسمت‌های رنگ‌شده کدام است؟ (تیزهوشان)



۱۱ (۲)

۱۰ (۱)

۱۲ (۴)

۱۷ (۳)

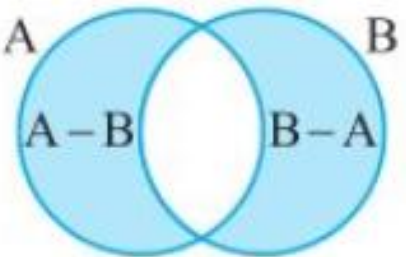
ت) تفاضل متقارن

به اجتماع مجموعه‌های $A - B$ و $B - A$ می‌گویند تفاضل متقارن A و B .

نمایش تفاضل متقارن به صورت $A \Delta B$ است:

در واقع $A \Delta B$ شامل تمام اعضای است که فقط عضو A هستند یا فقط عضو B (عضو $A \cap B$ نیستند).

حالا نمودار ون را برای تفاضل متقارن ببینید و تعریف دیگر $A \Delta B$ را از آن نتیجه بگیرید:



$$A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$$

$$A \Delta A = \emptyset, \quad A \Delta \emptyset = A$$

تذکر: با توجه به تعریف برای هر مجموعه دلخواه به نام A داریم:



تست: A یک مجموعه ۷ عضوی و B یک مجموعه ۵ عضوی است. کدام نتیجه‌گیری اشتباه است؟

(۱) اگر $A \cap B = \emptyset$ آن‌گاه $A \Delta B$ ، ۱۲ عضوی است.

(۲) $B \subset A$ آن‌گاه $A \Delta B$ ، ۲ عضوی است.

(۳) اگر $A \cap B$ ، ۲ عضوی باشد آن‌گاه $A \Delta B$ ، ۱۰ عضوی است.

(۴) اگر $A \cup B$ ، ۹ عضوی باشد آن‌گاه $A \Delta B$ ، ۶ عضوی است.



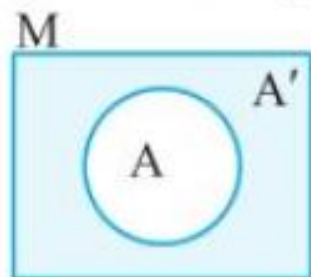
مجموعه مرجع

در هر مسئله، می شود مجموعه‌ای را در نظر گرفت که همه مجموعه‌های دیگر، زیرمجموعه آن باشند. به این مجموعه، مجموعه مرجع می گویند و آن را با M یا U نشان می دهند. واضح است تمام مجموعه‌ها (مثلاً A) زیرمجموعه M هستند؛ پس:

$$A \cap M = A \quad , \quad A \cup M = M$$

متمم یک مجموعه

متمم یک مجموعه به نام A با توجه به مجموعه مرجع این طور تعریف می شود: «تمام اعضای که در مجموعه مرجع هستند ولی در A نیستند.» این مجموعه را با A' نشان می دهیم و نمودار ون و نمایش ریاضی آن به صورت زیر است:



$$A' = \{x \mid x \in M, x \notin A\}$$

$$A \cap A' = \emptyset \quad , \quad A \cup A' = M \quad , \quad \emptyset' = M \quad , \quad M' = \emptyset \quad , \quad (A')' = A$$

تذکر: از تعریف مجموعه متمم نتیجه می شود:



نکته تکمیلی: تساوی‌های زیر به ازای تمام مجموعه‌ها برقرار است:

- ① $A - B = A \cap B'$: تعریف تفاضل A و B با استفاده از B'
- ② $(A \cup B)' = A' \cap B'$: متمم اجتماع دو مجموعه برابر است با اشتراک متمم‌های آن‌ها
- ③ $(A \cap B)' = A' \cup B'$: متمم اشتراک دو مجموعه برابر است با اجتماع متمم‌های آن‌ها





تست: حاصل $(B \cup A')' \cup (B' \cup A)'$ در کدام گزینه آمده است؟

$A \Delta B$ (۱)

$A \cup B$ (۲)

$(A \cap B)'$ (۳)

$(A \cup B)'$ (۴)



تست: حاصل $(A \cap M)' \cap (\emptyset' \cup A)'$ در کدام گزینه آمده است؟

A' (۴)

A (۳)

\emptyset (۲)

M (۱)



هوشلند

مرتضی طاهری



(تیزهوشان)

تست: اگر $A \subset B$ باشد، در این صورت حاصل $A \cup (B \cap A')$ برابر است با:

M (۴)

A' (۳)

B (۲)

A (۱)



هوشلند

مرتضی طاهری



تعداد اعضای مجموعه‌ها

طبق تعریف کتاب درسی، تعداد عضوهای مجموعه A را با نماد $n(A)$ نشان می‌دهیم. از طرفی معلوم است که اگر A و B جدا از هم باشند (یعنی $A \cap B = \emptyset$)، تعداد اعضای $A \cup B$ می‌شود مجموع اعضای A و B :
 $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow n(A \cup B) = n(A) + n(B)$
 حالا اگر $A \cap B \neq \emptyset$ برای به دست آوردن $n(A \cup B)$ باید به نکته زیر رجوع کنیم:

نکته واجب:

$$① \quad n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$$

$$② \quad n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$



تست: چند عدد دو رقمی وجود دارد که حداقل بر یکی از اعداد ۳ یا ۵ بخش پذیرند؟

۴۸ (۱)

۳۶ (۲)

۴۰ (۳)

۴۲ (۵)

A : اعداد دو رقمی که بر ۳ بخش پذیرند

$$\frac{99}{3} = 33$$

$$33 - 3 = 30$$

B : اعداد دو رقمی که بر ۵ بخش پذیرند

$$\frac{95}{5} = 19$$

$$19 - 1 = 18$$

$$n(A \cup B)$$

$$= n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$30 + 18 - 6 = 42$$

A ∩ B : بر ۳ و ۵ بخش پذیر یعنی بر ۱۵ بخش پذیر

$$\frac{90}{15} = 6$$



تست: در یک گروه ۱۳ نفری ۷ نفر عینک می‌زنند و ۹ نفر ساعت دارند. ۵ نفر، هم ساعت دارند و هم عینک می‌زنند. چند نفر نه عینک می‌زنند و

(انرژی اتمی)

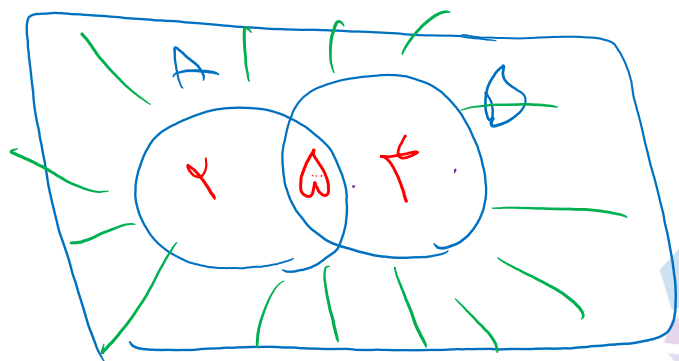
نه ساعت دارند؟

(۴) حداقل ۵ نفر

(۳) دقیقاً ۳ نفر

(۲) دقیقاً ۲ نفر

(۱) حداکثر ۳ نفر



$$n(A \cup B) = 11$$

$$13 - 11 = 2$$

عینکی ها = A
ساعتی ها = B

هوشلند

مرتضی طاهری



مجموعه‌های نامتناهی و متناهی

به مجموعه‌هایی مثل مجموعه اعداد طبیعی که اعضایشان تمام‌شدنی نیستند، می‌گویند مجموعه‌های نامتناهی. به مجموعه‌هایی مثل $\{1, 2, 3, \dots, 10^1\}$ که اعضایشان محدود است می‌گویند متناهی. نکته زیر را ببینید:

نکته:

① اگر $A \subset B$ و A نامتناهی باشد، B حتماً نامتناهی است. ② اگر $C \subset D$ و D متناهی باشد، C حتماً متناهی است.



هوش‌لند



بسته بودن یک مجموعه نسبت به یک عملگر: مجموعه اعداد طبیعی را در نظر بگیرید. قطعاً حاصل جمع هر دو عضو آن، عدد طبیعی است. در این صورت می‌گوییم مجموعه اعداد طبیعی نسبت به جمع بسته است. اما این مجموعه نسبت به تفریق بسته نیست. زیرا می‌شود دو عدد طبیعی پیدا کرد که حاصل تفریق آن‌ها عدد طبیعی نباشد مثال: $1 - 3 = -2 \notin \mathbb{N}$.

(تیزهوشان)

تست: کدام گزینه نادرست است؟

$$a, b \in \mathbb{Z} \Rightarrow (a - b) \in \mathbb{Z} \quad (\text{الف})$$

$$a, b \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{a}{b} \in \mathbb{Z} \quad (\text{ب})$$

$$a, b \in \mathbb{Z} \Rightarrow a \times b \in \mathbb{Z} \quad (\text{ج})$$

$$a, b \in \mathbb{Z} \Rightarrow (a + b) \in \mathbb{Z} \quad (\text{د})$$

Handwritten notes and examples:

- Examples of subtraction: $1, 2$; $2, 4$; $9, 6$
- Set definition: $A = \{-1, 1\}$
- Set definition: $\{2^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$
- Set definition: $\{\dots, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8, \dots\}$





هوشلند

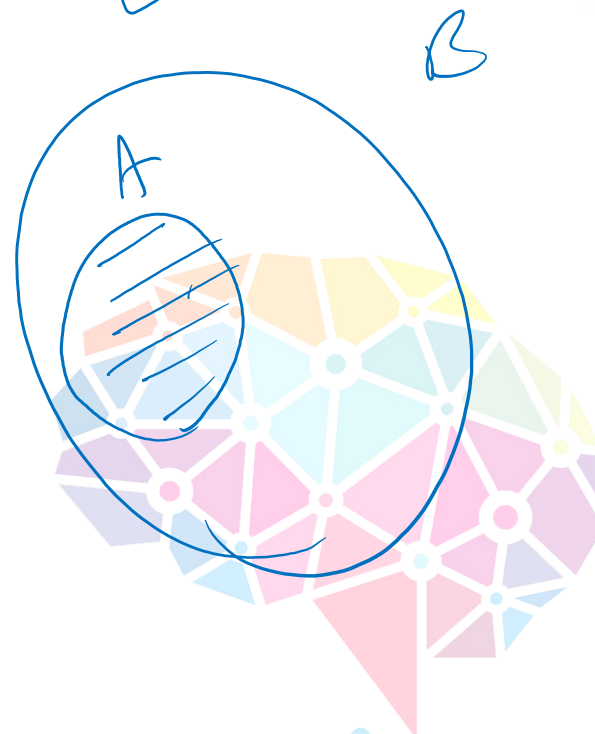
اگر $A \subset A \cap B$ ، آن وقت

(۱) حتماً \emptyset است.

(۳) B نمی تواند تهی باشد.

(۲) حتماً برابر B است.

(۴) حتماً زیرمجموعه B است.



هوشلند

اگر $A \cup B \subset A \cap B$ باشد، کدام گزینه حتماً درست است؟

$A = \emptyset$ (۴)

$A \cup B = A \cap B$ (۳) ✓

$A \subset B$ (۲)

$A = B = \emptyset$ (۱)

$A \cup B = A \cap B$

$A = \{1\}$
 $B = \{1\}$



هوشلند

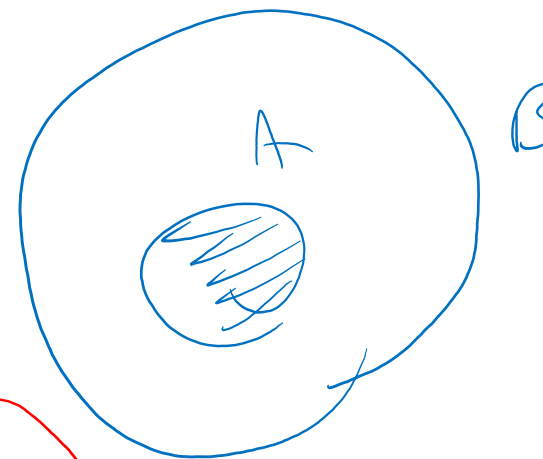
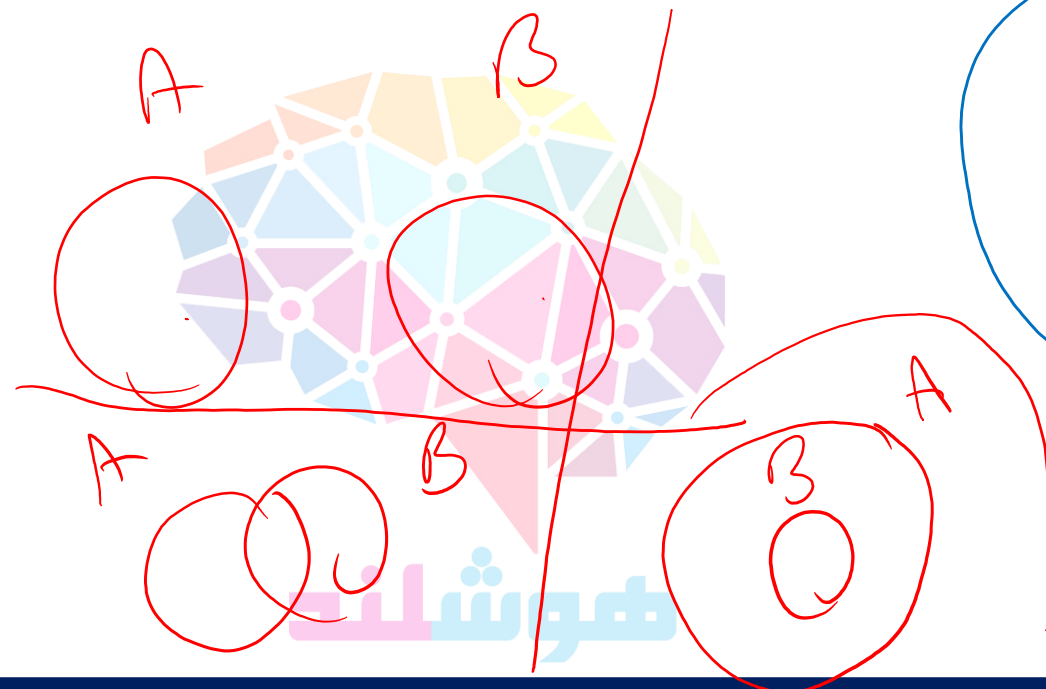
کدام گزینه نادرست است؟

~~$A \subset \emptyset \Rightarrow A \cup \emptyset = \emptyset$ (۱)~~

$A \subset B \Rightarrow A \cap B = A$ (۳)

$A \cup B \subset A \Rightarrow A \cup B = A$ (۲)

$A \subset A \cup B \Rightarrow A \cap B = B$ (۴)



کدام گزینه درست است؟

$$A \cup B = A \cup C \Rightarrow B = C \quad (1)$$

$$(A \cup B) \subset C \Rightarrow (A \cup B) \cup C = C \quad (3)$$

$$A \cap B = A \cap C \Rightarrow B = C \quad (2)$$

$$(A \cap B) \subset C \Rightarrow (A \cap B) \cup C = A \cap B \quad (4)$$



هوشلند

مرتضی طاهری



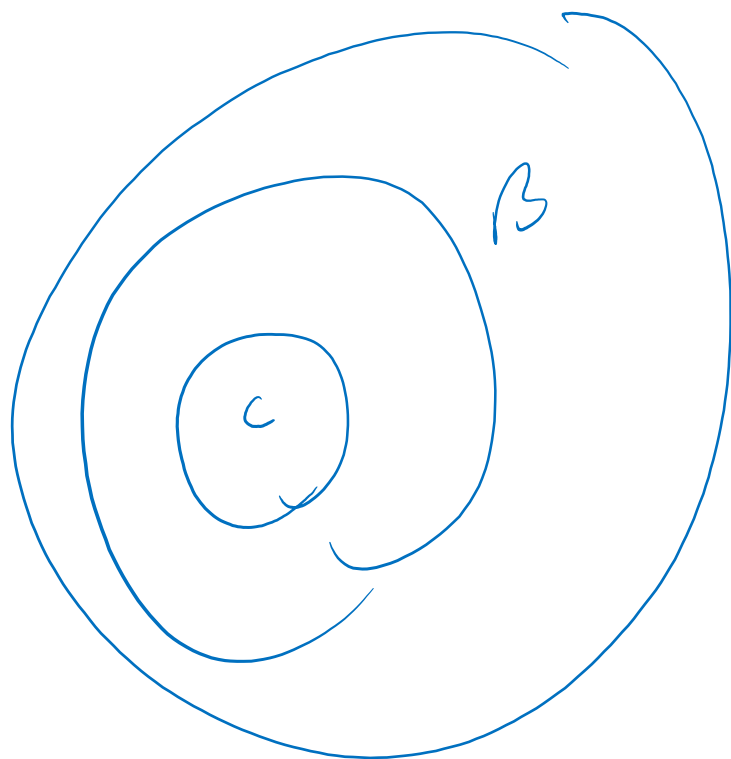
از $A \cap B = B$ و $B \cap C = C$ کدام گزینه را می توان نتیجه گرفت؟

$$A = B = C \text{ (۴)}$$

$$A \subset C \subset B \text{ (۳)}$$

$$C \subset B \subset A \text{ (۲)}$$

$$A \subset B \subset C \text{ (۱)}$$



هوشلند

مرتضی طاهری



اگر $A, B \neq \emptyset$ ، حاصل $A \cup (B \cap A)$ کدام است؟

A (۲)

B (۱)

$A \cup B$ (۴)

$A \cap B$ (۳)

$$A \cap (B \cup A) = A$$



هوشلند

مرتضی طاهری



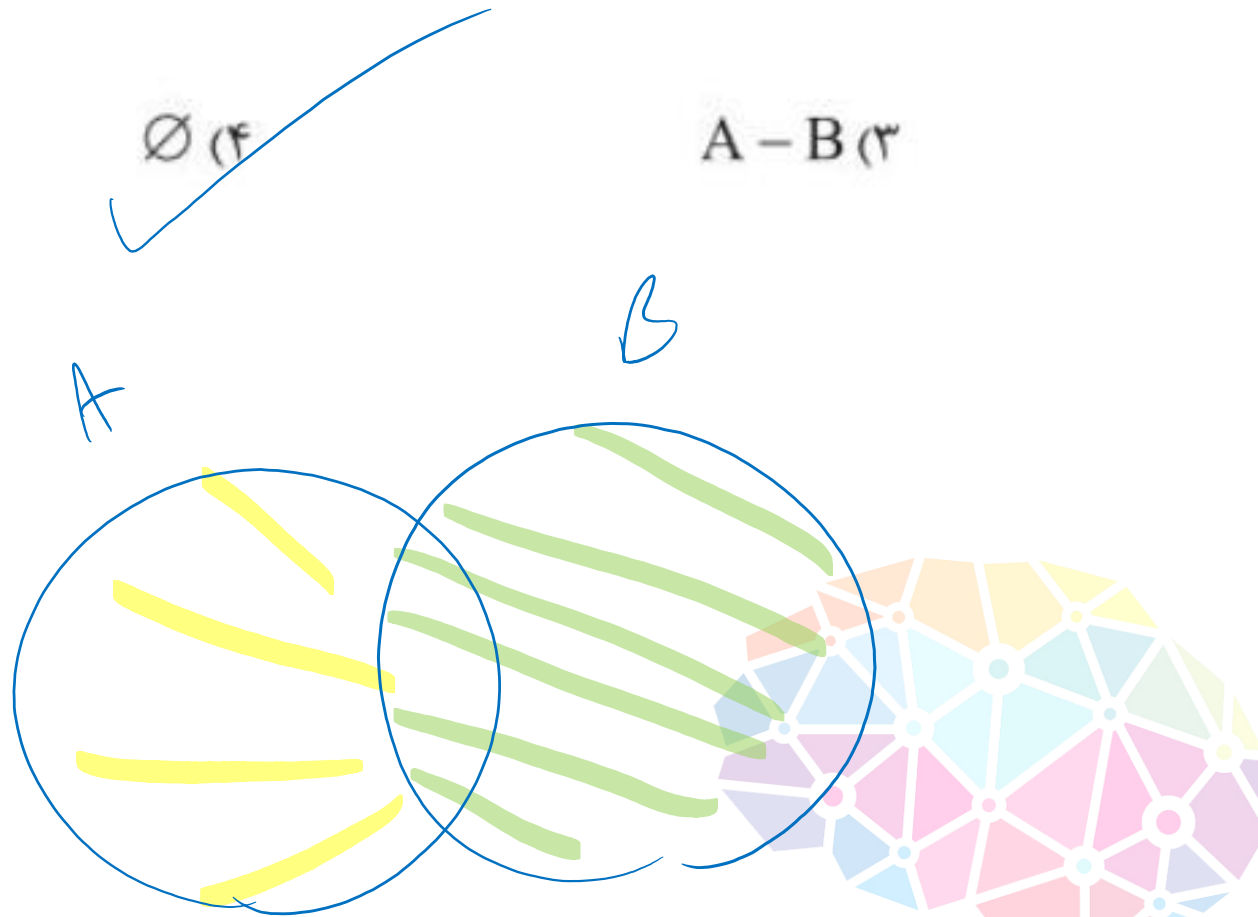
حاصل $(A - B) \cap B$ کدام است؟

A (۲)

$A \cap B$ (۱)

$A - B$ (۳)

\emptyset (۴)



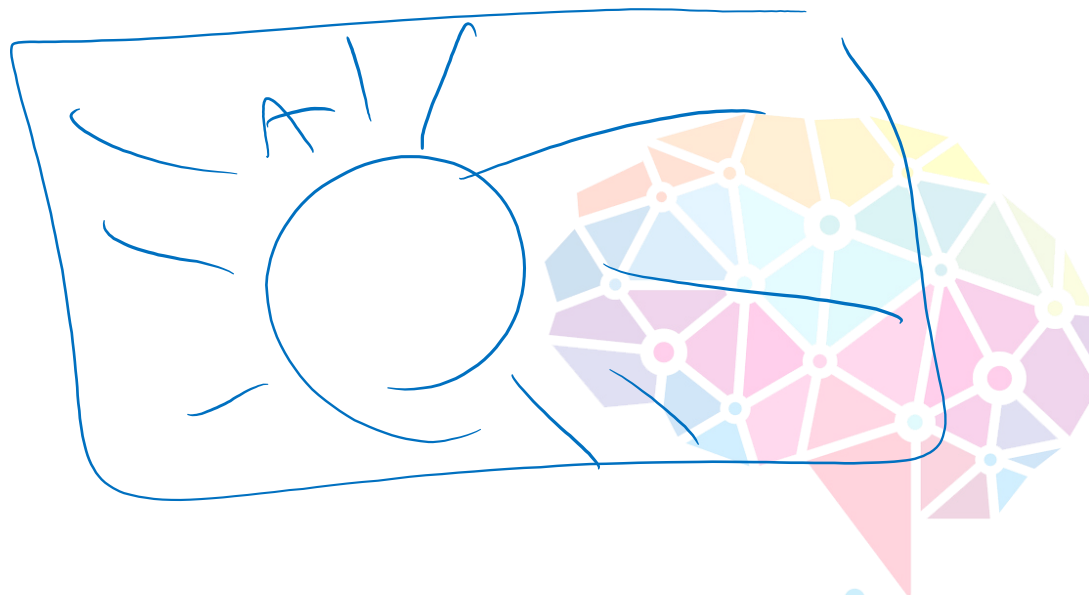
کدام تساوی زیر نادرست است؟ $(A \neq \emptyset, A \subset M)$

$$\emptyset - A = \emptyset \quad (۴)$$

$$M - A = A \quad (۳)$$

$$A - A = \emptyset \quad (۲)$$

$$A - \emptyset = A \quad (۱)$$



هوشلند



به ازای چند مجموعه دو عضوی A و B ، حاصل $(A - B) \cap (B - A)$ تک‌عضوی است؟

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

۱ (صفر) ✓



هوشلند

مرتضی طاهری



اگر A مجموعه اعدادی باشد که معکوسشان با خودش برابر است و B مجموعه اعدادی باشد که معکوسشان با ربعشان برابر است، در این

(المپیاد ریاضی)

صورت مجموعه $(A \cup B) - (A \cap B)$ چند زیرمجموعه دارد؟

۴ (۴)

۸ (۳)

۳۲ (۲)

۱۶ (۱) ✓

$$A = \{-1, 1\}$$

$$B = \{-2, +2\}$$

$$A \cup B = \{-2, -1, +1, +2\}$$

$$\frac{1}{n} = \frac{n}{\Sigma} \rightarrow n^2 = \Sigma$$

$$n = \pm 2$$



هوشلند

مرتضی طاهری

