

## جبر

### عبارت جبری، اتحاد

سؤال ورودی: فرض کنید  $x, y$  دو عدد حقیقی هستند که  $x^2 + y^2 = 10x - 6y - 34$ . مقدار  $x + y$  چند است؟  
راه حل: گام اول، همه چپو ببرید یه طرف. و به فکر اتحاد باشید.

$$x^2 + y^2 - 10x + 6y + 34 = 0 \rightarrow x^2 + y^2 - 10x + 6y + 25 + 9 = 0$$
$$x^2 + y^2 - 10x + 6y + 25 + 9 = 0 \rightarrow (x - 5)^2 + (y + 3)^2 = 0$$

دقت کنید که

$$(x - 5)^2 = x^2 + 25 - 10x$$
$$(y + 3)^2 = y^2 + 9 + 6y$$

حالا جمع دو عدد مربع کامل برابر صفر شده. چه نتیجه ای؟ این که هر دوی اون ها باید صفر باشند. (چون منفی نمی شوند).

$$x - 5 = 0, y + 3 = 0 \rightarrow x = 5, y = -3 \rightarrow x + y = 2$$

مربع کامل سازی...

بعدا بیش تر می بینیم...

کتاب:

آشنایی با جبر، محسن جمالی، انتشارات فاطمی

مباحث و مسائل مرحله اول المپیاد ریاضی، محمد جعفری، نشر الگو

## اتحادهای جبری

مربع دو جمله‌ای

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$
$$(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ba + b^2$$

نتیجه:

$$a^2 + b^2 = \frac{(a + b)^2 + (a - b)^2}{2}$$
$$ab = \frac{(a + b)^2 - (a - b)^2}{4}$$

اتحاد مزدوج

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

سؤال ۱: عبارت  $x^4 + 4y^4$  را تجزیه کنید.

راه‌حل: اول توی یک مربع این جمله‌ها رو درست می‌کنیم، تا بعدش...

$$x^4 + 4y^4 = (x^2 + 2y^2)^2 - 4x^2y^2 = (x^2 + 2y^2)^2 - (2xy)^2$$

که طبق مزدوج تجزیه می‌شود...  $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

$$x^4 + 4y^4 = (x^2 + 2y^2)^2 - (2xy)^2 = (x^2 + 2y^2 - 2xy)(x^2 + 2y^2 + 2xy)$$

و کامل است.

سؤال ۲: مقدار عددی عبارت زیر چند است:

$$1000^2 + 998^2 + 996^2 + \dots + 4^2 + 2^2 - (999^2 + 997^2 + 995^2 + \dots + 3^2 + 1^2)$$

راه‌حل: دسته‌بندی کنیم و بعد اختلاف دو عدد مربع را مزدوج بنویسیم:

$$\begin{aligned}
 & (1000^2 - 999^2) + (998^2 - 997^2) + (996^2 - 995^2) + \dots + (4^2 - 3^2) + (2^2 - 1^2) \\
 &= (1000 + 999)(1000 - 999) + (998 + 997)(998 - 997) \\
 &+ (996 + 995)(996 - 995) + \dots + (4 + 3)(4 - 3) + (2 + 1)(2 - 1) \\
 &= (1000 + 999) + (998 + 997) + (996 + 995) + \dots + (4 + 3) + (2 + 1) \\
 &= 1000 + 999 + 998 + 997 + \dots + 4 + 3 + 2 + 1 = \frac{1000 \times 1001}{2} \\
 &= 500 \times 1001 = 500500
 \end{aligned}$$

اتحاد مکعب دوجمله‌ای

$$\begin{aligned}
 (a + b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\
 (a - b)^3 &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3
 \end{aligned}$$

مدل دیگه نوشتن مکعب دوجمله‌ای

$$(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$$

سؤال ۳: معادله زیر را حل کنید.

$$\sqrt[3]{1 + \sqrt{x}} + \sqrt[3]{1 - \sqrt{x}} = \sqrt[3]{5}$$

راه‌حل:

برای برداشتن فرجه سه‌ها دو طرف به توان سه.

فرض کنیم  $a = \sqrt[3]{1 + \sqrt{x}}$  و  $b = \sqrt[3]{1 - \sqrt{x}}$ . مدل دوم اتحاد مکعب را استفاده

$$\begin{aligned}
 a + b = \sqrt[3]{5} &\rightarrow a^3 + b^3 + 3ab(a + b) = 5 \rightarrow (1 + \sqrt{x}) + (1 - \sqrt{x}) + 3ab(\sqrt[3]{5}) = 5 \\
 \rightarrow ab(\sqrt[3]{5}) &= 1 \rightarrow \left(\sqrt[3]{1 + \sqrt{x}}\right) \left(\sqrt[3]{1 - \sqrt{x}}\right) (\sqrt[3]{5}) = 1 \\
 \rightarrow \sqrt[3]{(1 + \sqrt{x})(1 - \sqrt{x})(5)} &= 1 \rightarrow (1 + \sqrt{x})(1 - \sqrt{x})(5) = 1 \rightarrow \\
 (1 - x)(5) &= 1 \rightarrow 1 - x = \frac{1}{5} \rightarrow x = \frac{4}{5}
 \end{aligned}$$

تمرین: کتاب آشنایی با جبر، فصل ۱، تا پایان مثال ۲۱ برید جلو و همه را حل کنید. اشکال‌هاتون مشخص باشه که سر کلاس بپرسید.

اگه سؤال بیشتر خواستید، از مباحث مسائل یا الفبای جبر حل کنید.