استاد وحید اسدی‌کیا

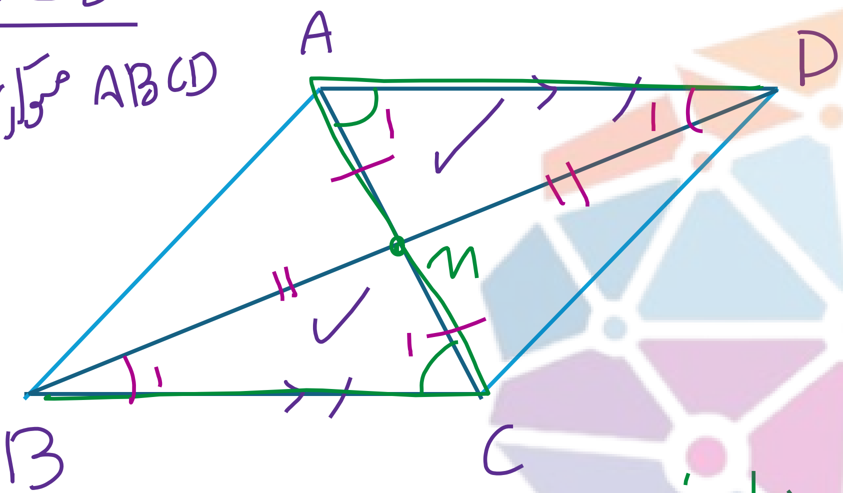
هوشلند

سرزمین تیزهوشان ایران

سوال: ثابت کنید اگر در یک چهارضلعی، دو ضلع روبرو به هم، با یکدیگر مساوی و موازی باشند، آن چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

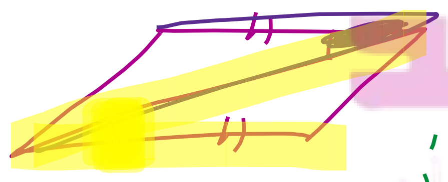
فرض | $AD \overset{\parallel}{=} BC$

حکم | $ABCD$ متوازی‌الاضلاع است.



برهان: از A به C وصل می‌کنیم و از D به B وصل می‌کنیم. در این صورت

$\overset{\triangle}{AMD} \cong \overset{\triangle}{BMC}$ (ز ض ز) $\Longrightarrow$ $AM = MC$ ، $BM = MD$ $\Longrightarrow$ قبلاً اثبات کردیم که اگر در یک چهارضلعی قطرها یکدیگر را نصف کنند، متوازی‌الاضلاع است.

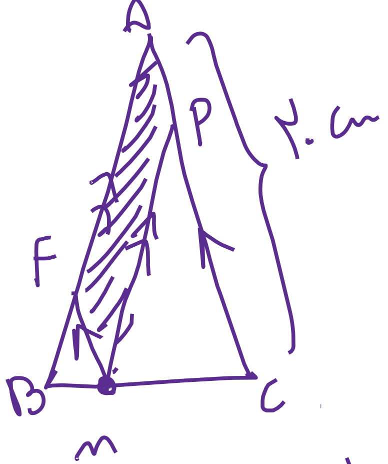


روش دوم: تمرین ۱ از سوال ۱۲ هندسه ... تا ۴۶ هندسه اول تا تجربه

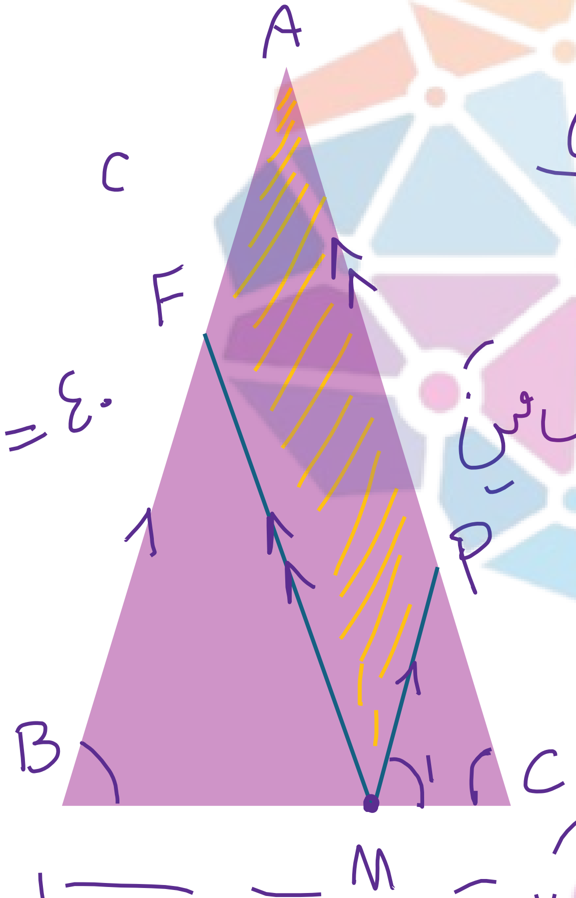
استاد وحید اسدی‌کیا

استاد وحید اسدی‌کیا

اگر از هر نقطه بر قاعده‌ی مثلث متساوی‌الساقین، دو خط موازی با دو ساقِ آن رسم کنیم، متوازی‌الاضلاعی به وجود می‌آید که محیط آن با مجموع دو ساق مثلث برابر است.



محیط AFMP $= 2 \times 20 = 40$



فرض | $AB = AC$ و $MP \parallel AB$ و $MF \parallel AC$

حکم | محیط APMF $= AB + AC$

برهان: مثلث FBM و مثلث PMC، متساوی‌الساقین هستند. زیرا

$\hat{M}_1 = \hat{B}$ (موازی و مورب)

$\hat{C} = \hat{B}$ (مثلث ABC متساوی‌الساقین)

$\Rightarrow \hat{M}_1 = \hat{C} \Rightarrow \triangle MPC$ متساوی‌الساقین

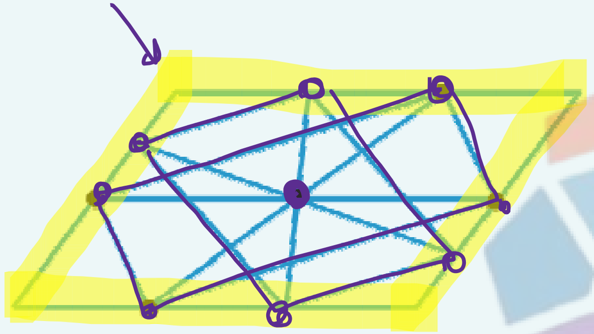
$\Rightarrow PM = PC$

با دلیل مشابه، $\triangle BFM$ متساوی‌الساقین، پس $FB = MF$

محیط AFMP $= AF + \underset{FB}{FM} + \underset{PC}{MP} + AP = \underbrace{AF + FB}_{AB} + \underbrace{PC + AP}_{AC} = AB + AC$

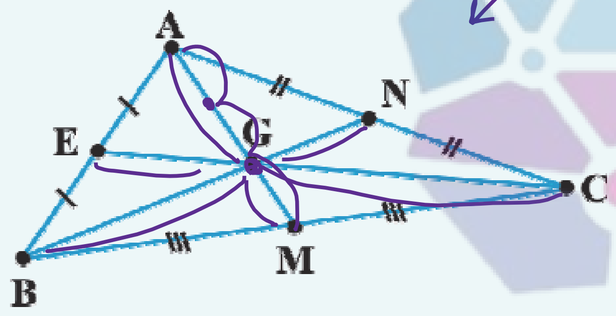
حکم اثبات شد.

نکته ۲۸: هرگاه یک یا چند متوازی‌الاضلاع، داخل متوازی‌الاضلاعی محاط شده باشند (رأس‌هایشان روی ضلع متوازی‌الاضلاع باشد به شرط آن‌که ضلع‌هایشان روی ضلع‌های آن نباشند)، مرکز همه‌ی آن‌ها روی مرکز متوازی‌الاضلاع محیطی قرار دارد:



استاد وحید اسدی‌کیا

نکته ۲۷: هر مثلث ۳ میانه دارد. می‌دانیم میانه پاره‌خطی است که رأس مثلث را به وسط ضلع مقابلش وصل می‌کند. میانه‌های هر مثلث، آن را به ۶ قسمت هم مساحت تقسیم می‌کنند. محل برخورد میانه‌ها را مرکز ثقل یا مرکز تعادلِ مثلث (یا گرانیگاه) می‌گویند. داریم:

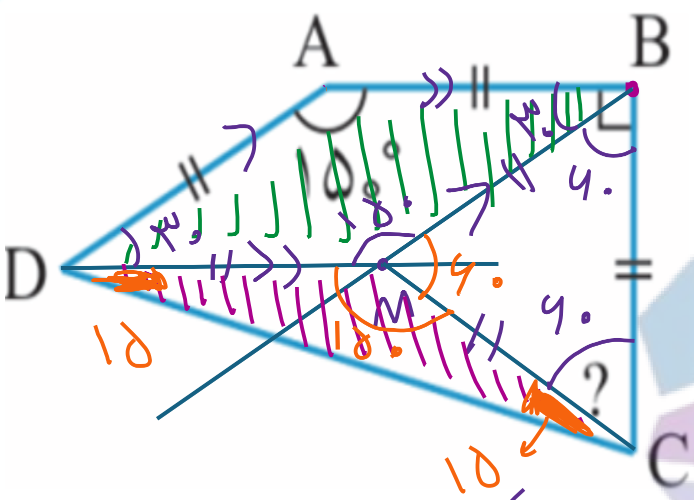


$$\overline{AG} = \frac{2}{3}\overline{AM} \Rightarrow \overline{AG} = 2\overline{GM}$$

$$\overline{BG} = \frac{2}{3}\overline{BN} \Rightarrow \overline{BG} = 2\overline{GN}$$

$$\overline{CG} = \frac{2}{3}\overline{CE} \Rightarrow \overline{CG} = 2\overline{GE}$$

استاد وحید اسدی‌کیا



۷۸. در چهارضلعی ABCD، $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{AD}$ است. اگر $\hat{A}=۱۵۰^\circ$ باشد، اندازه‌ی زاویه‌ی C چند درجه است؟ (آزمون پایش سمپاد)

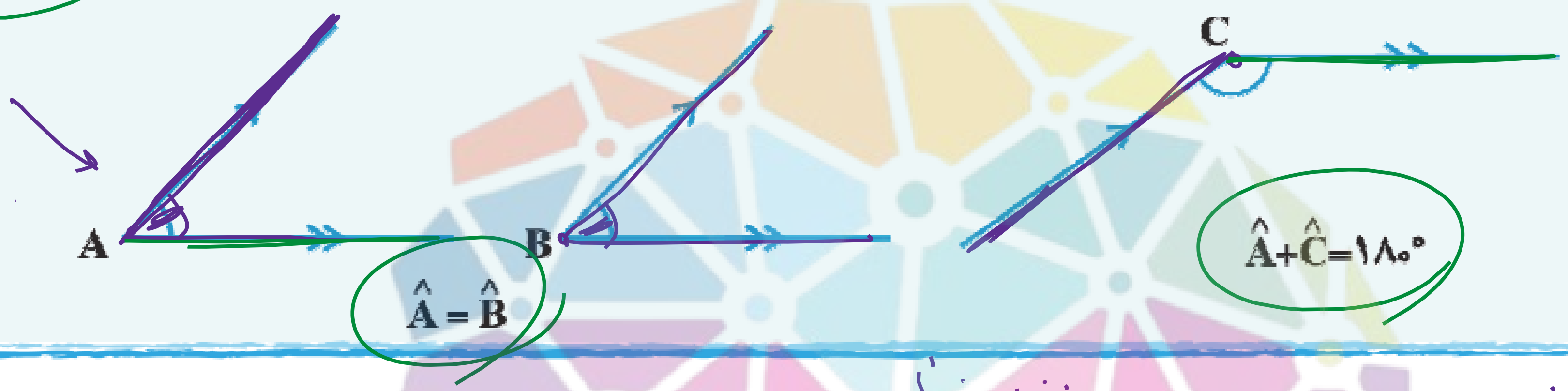
۱) ۴۵°　　۲) ۶۰°　　۳) ۷۵°　　۴) ۸۰°

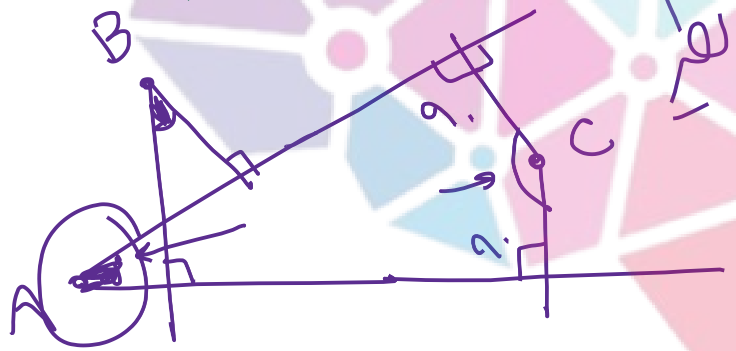
برهان: از B به موازات AD و از D به موازات AB رسم می‌کنیم. محل رسم‌ها M. چهارضلعی ABMD لوزی است (زیرا متوازی‌الاضلاعی است که دو ضلع مجاورش مساوی هستند پس لوزی است) پس $\hat{MBC}=۶۰^\circ$ و $\overline{MB}=\overline{AB}$. از طرفی $\overline{AB}=\overline{BC}$ پس $\overline{MB}=\overline{BC}$ پس مثلث MBC، مثلث متساوی‌الاضلاع می‌شود زیرا $\hat{B}=\hat{M}=\hat{C}=۶۰^\circ$

چون $\overline{MD}=\overline{AB}=\overline{MC}$ پس مثلث MDC متساوی‌الساقین است

$\hat{M}=۳۶۰-(۱۵۰+۶۰)=۱۵۰^\circ \Rightarrow$ $\hat{C}_2=۱۵$ ، $\hat{C}_1=۶۰$ $\Rightarrow \hat{C}=۶۰+۱۵=۷۵^\circ$

نکته ۲۹: هرگاه ضلع‌های دو زاویه، نظیر به نظیر با هم موازی باشند، آن دو زاویه یا مساویند و یا مکمل:



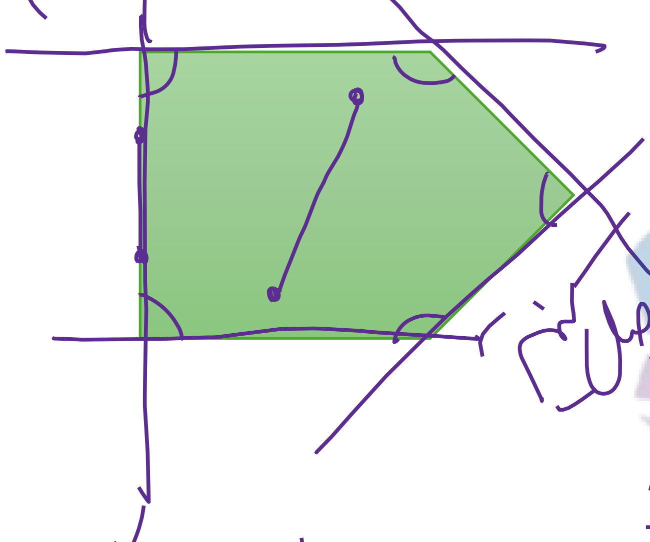


نکته: هرگاه ضلع‌های دو زاویه، نظیر به نظیر بر هم عمود باشند، این دو زاویه یا با هم برابرند یا با هم مکمل هستند.

استاد وحید اسدی‌کیا

چندضلعی محدب

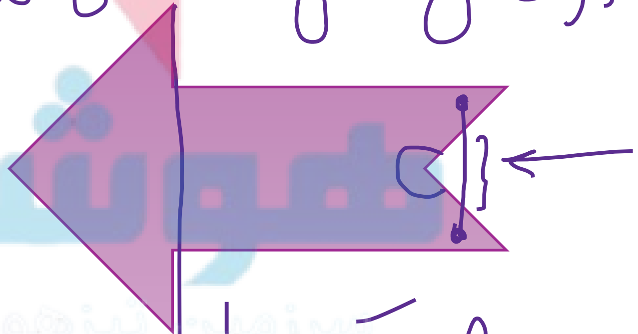
محدب (کوژ)



— در چندضلعی محدب، همه‌ی زاویه‌های داخلی، از ۱۸۰ درجه کمتر هستند.

— در چندضلعی محدب، هر دو نقطه از شکل را در نظر بگیریم و به هم وصل کنیم، پاره خط به وجود آمده یا روی ضلع یا داخل شکل به طور کامل قرار می‌گیرد.

— در چندضلعی محدب، هر ضلع را ادامه دهید، کل شکل در یک طرف خط قرار می‌گیرد. آن خط، از داخل شکل عبور نمی‌کند.



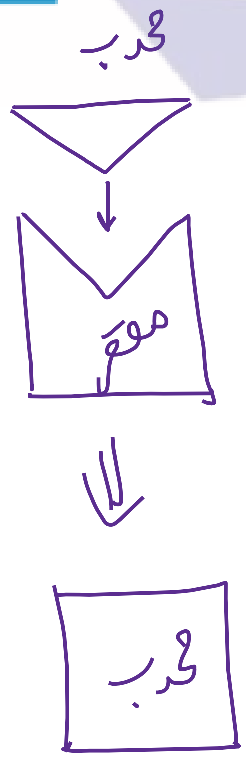
مقعر (کاو) ← فرورفته

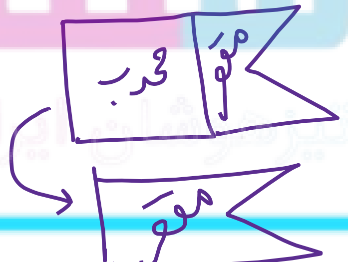
استاد وحید اسدی‌کیا

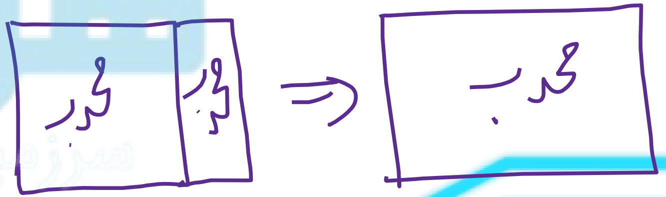
ترکیب محدب با مقعر، می‌تواند محدب یا مقعر شود.

ترکیب دو شکل مقعر، می‌تواند مقعر یا محدب شود.

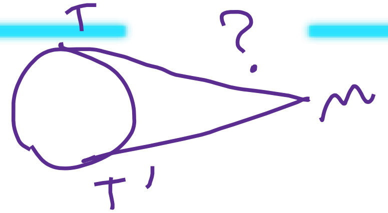
ترکیب دو شکل محدب، می‌تواند مقعر یا محدب شود.







اثبات در دایره



سؤال:

۸۶. برای اثبات « مماس‌های رسم شده از نقطه‌ای بیرون دایره بر دایره با هم برابرند»، از کدام حالت همنهشتی مثلث‌ها باید استفاده کرد؟

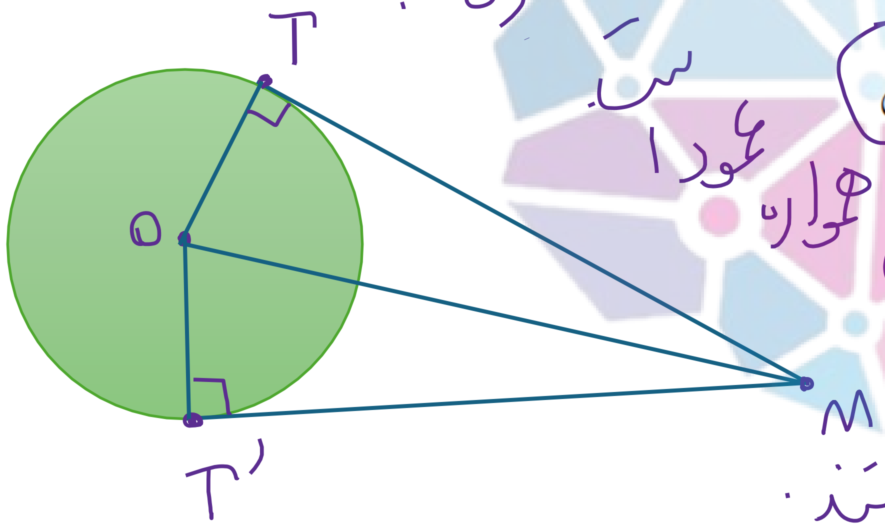
۱) ض ز ض

۲) وتر و یک ضلع

۳) وتر و یک زاویه‌ی تند

۴) ز ض ز

برهان:



نکته مهم مهم مهم

شعاع دایره در نقطه‌ی تماس بر خط مماس عمود است.

برهان: ثابت می‌کنم دو مثلث قائم الزاویه با هم همنهشت هستند.

$\overline{OT} = \overline{OT'}$ شعاع

$\hat{T} = \hat{T'} = 90^\circ$ طبق نکته

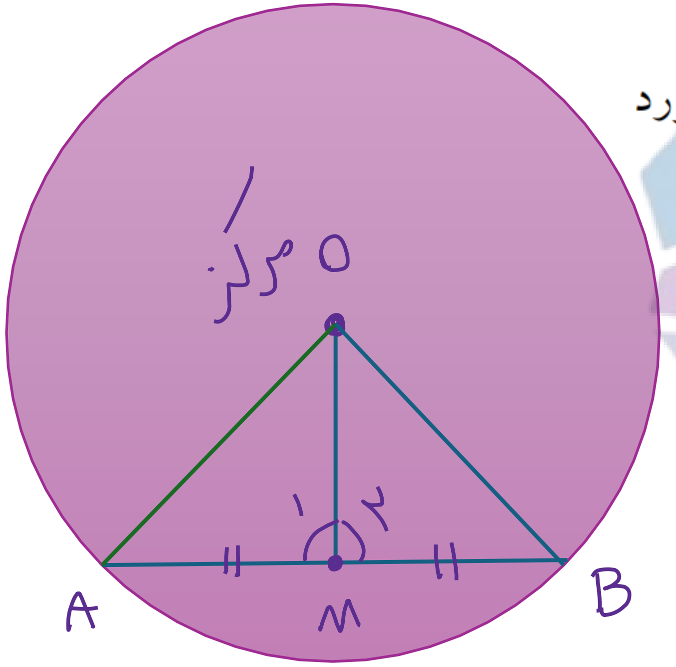
$\overline{OM} = \overline{OM}$ ضلع مشترک

$\Rightarrow \overset{\triangle}{OTM} \cong \overset{\triangle}{OT'M} \Rightarrow \boxed{MT = MT'}$

وتر و یک ضلع

۸۷. در اثبات «خطی که مرکز دایره را به وسط وتری از آن وصل می‌کند، بر آن وتر عمود است» از کدام حالت همنهشتی مثلث‌ها می‌توان استفاده کرد؟

۱) ض ض ض ۲) ض ز ض ۳) ز ض ز ۴) هر سه مورد



$\overline{OA} = \overline{OB}$ شعاع

$\overline{AM} = \overline{MB}$ فرض

$\overline{OM} = \overline{OM}$ ضلع مشترک

$\Rightarrow \overset{\triangle}{OMA} \cong \overset{\triangle}{OMB} \Rightarrow \hat{M_1} = \hat{M_2}$

ض ض ض

از طرفی داریم:

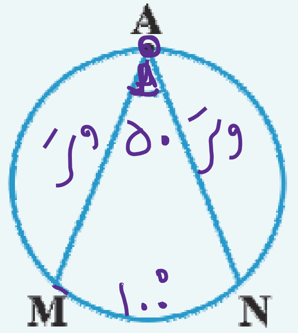
$M_1 + M_2 = 180°$

$M_1 = M_2$

$\Rightarrow M_1 = M_2 = 90°$

نکته ۳۵: در هر دایره، زاویه‌ی مرکزی با کمان مقابلش برابر است و هم‌چنین اندازه‌ی هر زاویه‌ی محاطی، نصفِ کمانِ مقابلش است.

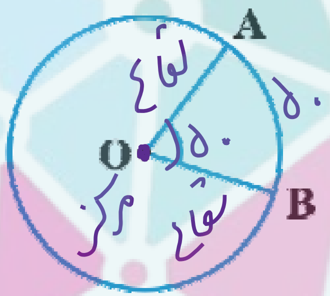
محاطی



$$\hat{A} = \frac{\widehat{MN}}{2}$$

$M\hat{A}N$ محاطی است.

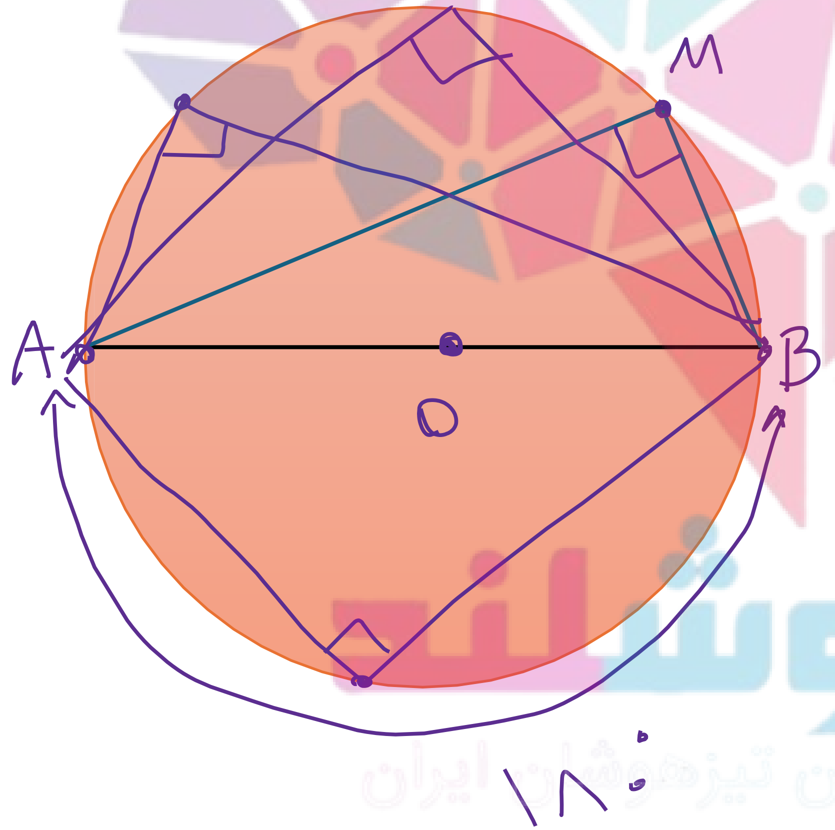
زاویه‌ی مرکزی



$$\hat{O} = \widehat{AB}$$

$A\hat{O}B$ مرکزی است.

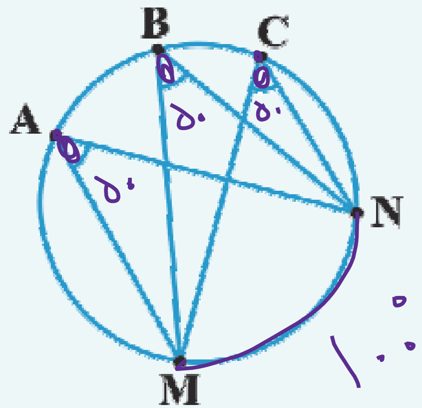
نکته ۳۶: اندازه‌ی هر زاویه‌ی محاطی روبه‌رو به قطر، ۹۰ درجه است. پس می‌توان نتیجه گرفت مرکز دایره‌ی محیطی هر مثلث قائم‌الزاویه، وسط وترش است.



۱۸۰ ÷ ۲ = ۹۰

یادآوری: در هر مثلث قائم‌الزاویه ضلع روبه‌روی زاویه ۳۰ درجه، نصف وتر و ضلع روبه‌روی زاویه ۶۰ درجه $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ وتر است.

نکته ۳۷: زاویه‌های محاطی رو به یک کمان در دایره، با هم برابرند:



$$\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \frac{\widehat{MN}}{۲}$$

تمرین: از سوال ۶۵ تا ۹۱

تمرین‌های خود حل شود

ارسال تا جمعه