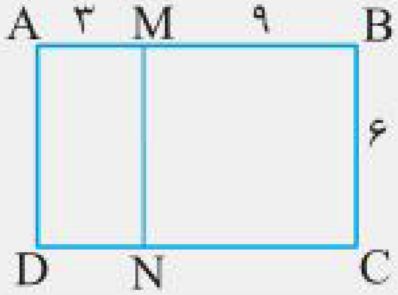
## تشابه

اول تعریف کتاب درسی از تشابه را ببینید: «هرگاه در دو چندضلعی همهٔ ضلع‌ها به یک نسبت تغییر کرده باشند (کوچک یا بزرگ شده یا بدون تغییر باشند) و اندازهٔ زاویه‌ها تغییر نکرده باشد، آن دو چندضلعی با هم متشابه‌اند.»

مثلاً تصویری که از یک میکروب در زیر میکروسکوپ می‌بینیم متشابه با خود میکروب است! راستی علامت تشابه ~ است.

**مثال:** مستطیل‌های ABCD و AMND با هم متشابه‌اند: چون اولاً تمام زاویه‌های هر دو مستطیل قائمه و با هم برابرند. ثانیاً نسبت عرض‌های آن‌ها با نسبت طول‌های آن‌ها برابر است. ببینید:




$$\frac{\text{عرض ABCD}}{\text{عرض AMND}} = \frac{۶}{۳} = ۲ \,,\; \frac{\text{طول ABCD}}{\text{طول AMND}} = \frac{۳+۹}{۶} = \frac{۱۲}{۶} = ۲$$

هوشلند

**تست:** چندتا از جملات زیر درست‌اند؟

الف) هر دو مثلث متساوی‌الساقین همواره متشابه‌اند.

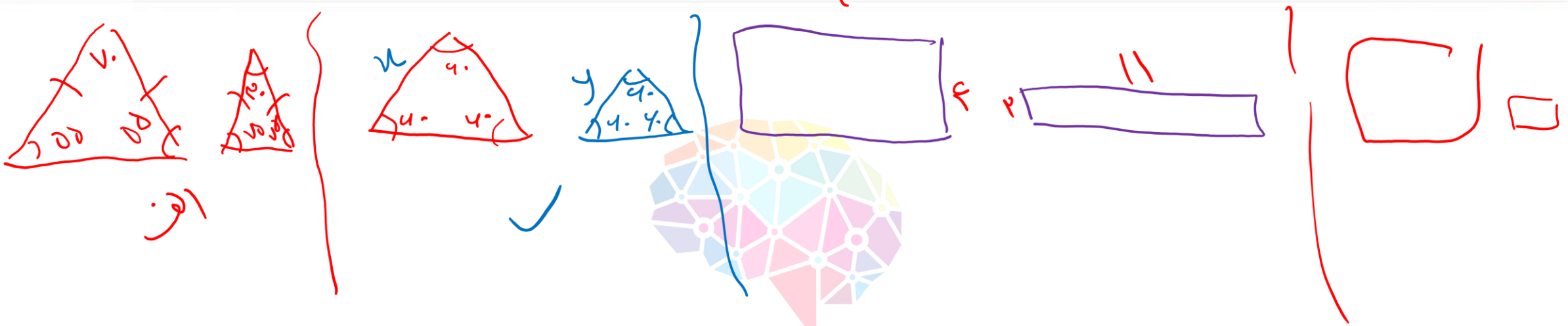
ب) هر دو مثلث متساوی‌الاضلاع همواره متشابه‌اند.

پ) هر دو مستطیل همواره متشابه‌اند.

ت) هر دو لوزی همواره متشابه‌اند.

ث) هر دو مربع همواره متشابه‌اند.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

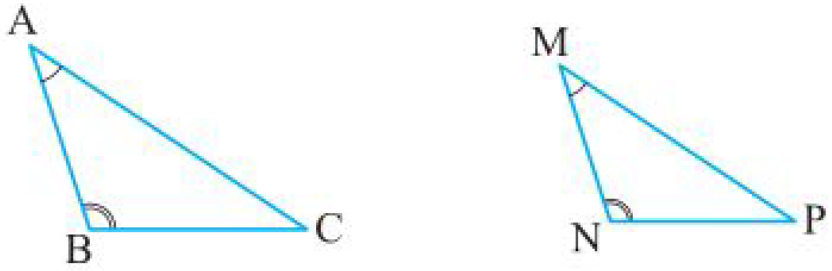


هوشلند

دکتر مرتضی طاهری

## تشابه مثلث‌ها

برای بیشتر طراحان، تشابه بین مثلث‌ها جذاب‌تر از بقیه است. به همین خاطر بیشتر روی آن تمرکز می‌کنیم. $\overset{\Delta}{ABC}$ و $\overset{\Delta}{MNP}$ را در نظر بگیرید.




اگر بدانیم دو زاویه از این مثلث‌ها با هم برابرند، خودبه‌خود زاویهٔ سوم هم برابر می‌شود

و می‌توان ثابت کرد که حتماً اضلاع آن‌ها متناسب‌اند؛ یعنی مثلث‌ها هم‌نهشت‌اند.

برای اثبات هم‌نهشتی مثلث‌ها دو روش دیگر هم وجود دارد که همه را در نکتهٔ زیر آورده‌ایم.

**نکتهٔ واجب:**

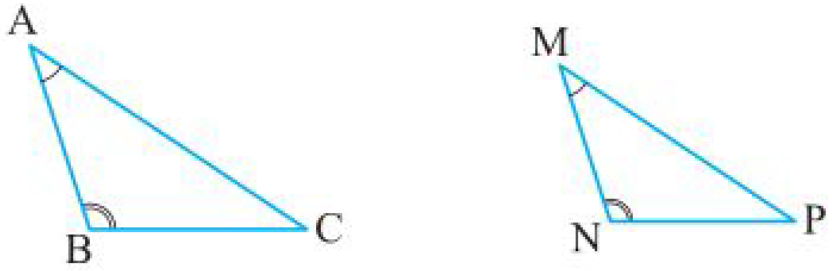
(۱) اگر در دو مثلث، دو زاویه برابر باشند، آن دو مثلث حتماً متشابه‌اند.

(۲) اگر در دو مثلث، دو ضلع متناسب باشند و زاویهٔ بین آن‌ها با هم برابر باشد، آن دو مثلث حتماً متشابه‌اند.

(۳) اگر هر سه ضلع دو مثلث متناسب باشند آن دو مثلث حتماً متشابه‌اند.

## تشابه مثلث‌ها

برای بیشتر طراحان، تشابه بین مثلث‌ها جذاب‌تر از بقیه است. به همین خاطر بیشتر روی آن تمرکز می‌کنیم. $\overset{\Delta}{ABC}$ و $\overset{\Delta}{MNP}$ را در نظر بگیرید.




اگر بدانیم دو زاویه از این مثلث‌ها با هم برابرند، خودبه‌خود زاویهٔ سوم هم برابر می‌شود

و می‌توان ثابت کرد که حتماً اضلاع آن‌ها متناسب‌اند؛ یعنی مثلث‌ها هم‌نهشت‌اند.

برای اثبات هم‌نهشتی مثلث‌ها دو روش دیگر هم وجود دارد که همه را در نکتهٔ زیر آورده‌ایم.

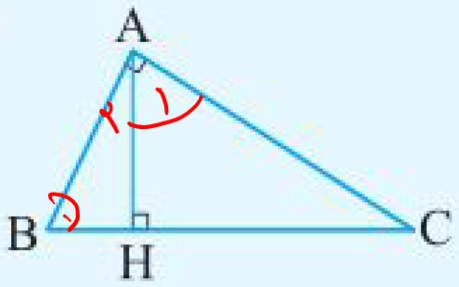
**نکتهٔ واجب:**

(۱) اگر در دو مثلث، دو زاویه برابر باشند، آن دو مثلث حتماً متشابه‌اند.

(۲) اگر در دو مثلث، دو ضلع متناسب باشند و زاویهٔ بین آن‌ها با هم برابر باشد، آن دو مثلث حتماً متشابه‌اند.

(۳) اگر هر سه ضلع دو مثلث متناسب باشند آن دو مثلث حتماً متشابه‌اند.

**تست:** در شکل مقابل کدام مثلث‌ها با هم متشابه‌اند؟




۱) $\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{ABH}$ ✓

۲) $\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{ACH}$

۳) $\overset{\Delta}{ABH} \sim \overset{\Delta}{ACH}$

۴) هر سه گزینه درست است.

$\hat{A} = 90^\circ = \hat{H}$

$\hat{B} = \hat{B}$

$\hat{A} = 90^\circ = \hat{H}$

$\hat{C} = \hat{C}$

$\hat{H} = 90^\circ = \hat{H}$ ✓

$\hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 90^\circ$

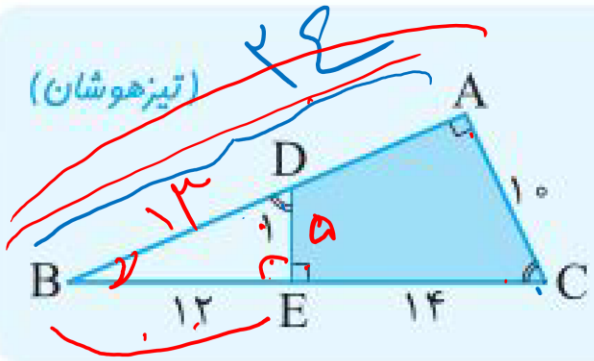
$\hat{B} + \hat{A}_2 = 90^\circ$

$\hat{B} = \hat{A}_1$ ✓

هوشلند

دکتر مرتضی طاهری

**تست:** در مثلث قائم‌الزاویهٔ مقابل، مساحت قسمت رنگی کدام است؟




۱) ۳۰
۲) ۱۳۰
۳) ۹۰
۴) ۷۰

$\triangle ABC: AB^2+10^2=24^2 \rightarrow AB^2=576 \rightarrow AB=24$

$\triangle ABC \sim \triangle BDE$

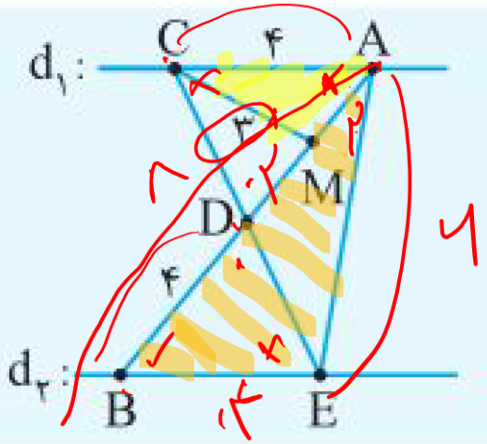
$\hat{B}=\hat{B}$, $D_1=C$

$S_{BDE}=\frac{12\times 5}{2}=30$

$S_{ABC}=\frac{24\times 10}{2}=120$

$120-30=90$

هوشلند




**تست:** در شکل مقابل خط‌های $d_1$ و $d_2$ با هم موازی‌اند. اگر D وسط AB باشد و CM میانهٔ $\overset{\Delta}{CDA}$ باشد، طول AE کدام است؟ $(AC = BD = ۴ , CM = ۳)$

۱) ۸
۲) ۹
۳) ۵
۴) ۶

$\hat{A_1} = \hat{B}$

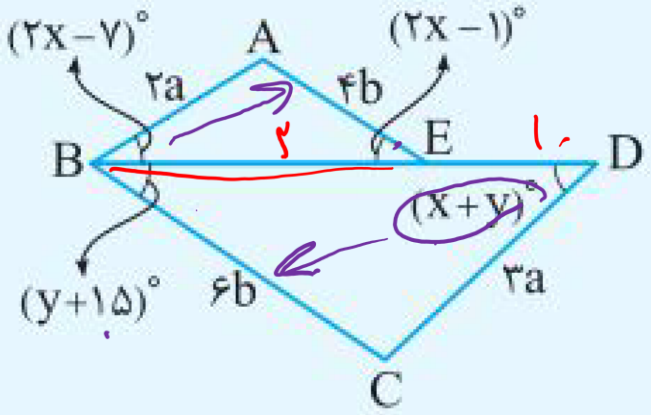
$BDE \cong CDA$

$\frac{AB}{AC} = ۲$ ، $\frac{AC}{AM} = ۲$

هوشلند

دکتر مرتضی طاهری

**تست:** در شکل مقابل می‌دانیم $BE = 2DE$ است. حاصل $x+y$ کدام است؟



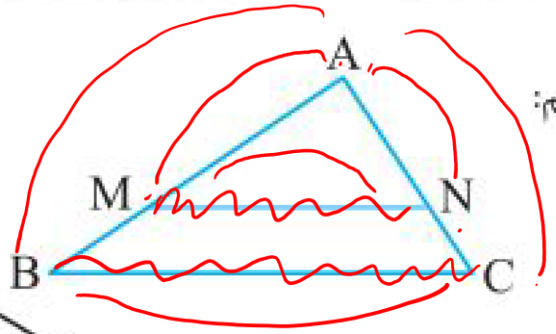

۱) ۲۰
۲) ۲۴
۳) ۱۱
۴) ۳۰

$\frac{CD}{AB} = \frac{2a}{2a} = \frac{2}{2}$ ، $\frac{BC}{AE} = \frac{4b}{4b} = \frac{3}{3}$ ، $\frac{BD}{BE} = \frac{9}{6}$

$x + y = 2x - 7 \rightarrow x + 2x - 14 = 2x - 7 \rightarrow x = 9$

$y + 15 = 2x - 1 \rightarrow y = 2x - 16$

دکتر مرتضی طاهری




**نکتهٔ واجب:** (تالس) اگر MN موازی BC باشد، $\overset{\Delta}{AMN}$ و $\overset{\Delta}{ABC}$ متشابه‌اند؛ پس داریم:

$$\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$$

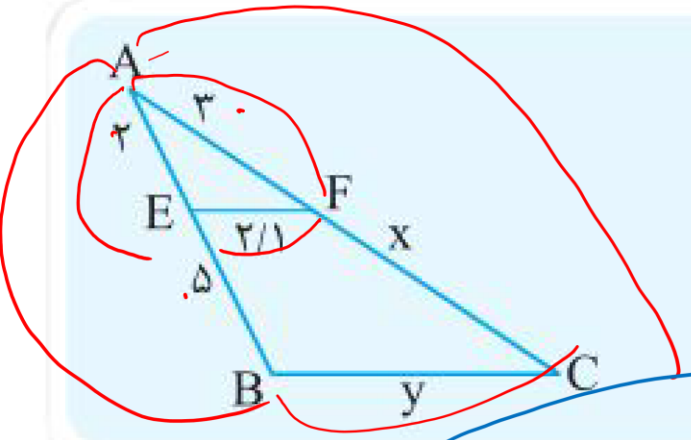
عبارت بالا به رابطهٔ «جزءبه‌کل» معروف است که از آن می‌توان رابطهٔ دیگری به نام «جزءبه‌جزء» را نتیجه گرفت:

$$\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}$$

هوشلند

**تست:** در شکل روبه‌رو حاصل $x+y$ کدام است؟ $(EF \parallel BC)$

۱) ۱۴/۸۵
۲) ۱۴/۳۵
۳) ۱۴/۲۵
۴) ۱۴/۷۵




$$\frac{۲}{۷} = \frac{۳}{۲+x} = \frac{۲/۱}{y}$$

$$\frac{۲}{۷} = \frac{۲/۱}{y}$$

$$۲y = ۱۴/۷$$

$$y = ۷/۳۵$$

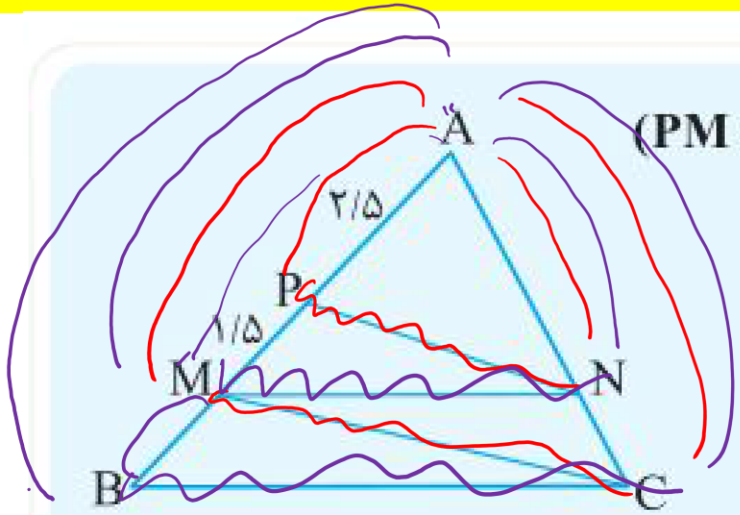
$$۲۱ = ۶ + ۳x$$

$$۱۵ = ۳x \rightarrow x = ۷$$

هوشلند

دکتر مرتضی طاهری

**تست:** در شکل مقابل $MN \parallel BC$ و $PN \parallel MC$ است. حاصل MB کدام است؟ $(AP = ۲/۵ , PM = ۱/۵)$




۱) ۲/۲
۲) ۲/۴
۳) ۲/۶
۴) ۲

$۶,۴ - ۴ = ۲,۴$

$\frac{AP}{AM} = \frac{AN}{AC} \rightarrow \frac{۲,۵}{۴} = \frac{AN}{AC}$

$۴\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} \rightarrow \frac{۲,۵}{۴} \rightarrow ۲,۵\,AB = ۱۰$

$AB = ۴$

هوشلند

دکتر مرتضی طاهری

**نکتهٔ تکمیلی:** اگر دو شکل با نسبت K متشابه باشند، همهٔ اجزای فرعی متناظر آن‌ها و محیطشان با نسبت K متناسب‌اند ولی نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر $K^2$ است.

نسبت تشابه = نسبت اضلاع

$$\frac{\text{محیط ۱}}{\text{محیط ۲}} = \frac{\text{ارتفاع}}{\text{ارتفاع}} = K = \frac{\text{یک ساز}}{\text{یک ساز}}$$

$$\frac{\text{مساحت}}{\text{مساحت}} = K^2$$

هوشلند