

یک مروری کردیم رو جلسه قبلی و اتحادها (مربع دو جمله‌ای، مزدوج، مکعب دو جمله‌ای، چاق و لاغر)، و از کتاب رفتیم فعلا تا مثال ۱۹ و صحبت‌هاشو کردیم.

معادله درجه دو

سؤال ۰:

همه x هایی را بیابید که معادله‌های زیر (هرکدام جدا) برقرار باشد:

$$\text{الف) } x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$\text{ب) } x^2 + 2x - 1 = 0$$

$$\text{ج) } x^2 + 2x + 3 = 0$$

راه‌حل:

الف)

$$x^2 + 2x + 1 = 0 \leftrightarrow (x + 1)^2 = 0 \leftrightarrow x + 1 = 0 \leftrightarrow x = -1$$

یک جواب $x = -1$ دارد.

ب)

$$\begin{aligned} x^2 + 2x - 1 = 0 &\leftrightarrow x^2 + 2x + 1 - 2 = 0 \leftrightarrow (x + 1)^2 - 2 = 0 \leftrightarrow (x + 1)^2 = 2 \\ &\leftrightarrow x + 1 = \pm\sqrt{2} \leftrightarrow x = \pm\sqrt{2} - 1 \end{aligned}$$

معادله دو جواب دارد. $\sqrt{2} - 1$ و $-\sqrt{2} - 1$.

ج)

$$\begin{aligned} x^2 + 2x + 3 = 0 &\leftrightarrow x^2 + 2x + 1 + 2 = 0 \leftrightarrow (x + 1)^2 + 2 = 0 \leftrightarrow \\ &(x + 1)^2 = -2 \end{aligned}$$

یک چیزی به توان دو، منفی همیشه. معادله جواب ندارد.

سؤال ۱: همه x هایی را بیابید که معادله‌های زیر (هرکدام جدا) برقرار باشد:

$$x^2 + 6x - 15 = 0 \text{ (الف)}$$

$$x^2 + 5x - 14 = 0 \text{ (ب)}$$

راه‌حل:

(الف)

$$x^2 + 6x - 15 = 0 \Leftrightarrow (x + 3)^2 - 9 - 15 = 0 \Leftrightarrow (x + 3)^2 = 24 \Leftrightarrow$$

$$x + 3 = \pm\sqrt{24} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{24} - 3$$

دو جواب دارد. همین بالایی‌ها.

(ب)

$$x^2 + 5x - 14 = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} - 14 = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{81}{4} \Leftrightarrow x + \frac{5}{2} = \pm\frac{9}{2}$$
$$\Leftrightarrow x = \pm\frac{9}{2} - \frac{5}{2}$$

دو جواب دارد. $x = -7$. $x = 2$.

سؤال ۳: معادله $2x^2 + 3x - 5 = 0$ را حل کنید.

راه‌حل:

$$2x^2 + 3x - 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{5}{2} = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16} - \frac{5}{2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{49}{16} \Leftrightarrow x + \frac{3}{4} = \pm\frac{7}{4} \Leftrightarrow x = \pm\frac{7}{4} - \frac{3}{4}$$

دو جواب دارد. $x = 1$ و $x = -\frac{5}{2}$.

حالت کلی معادله درجه دو (فرمول دلتا)

فرض کنید a, b, c سه عدد داده شده باشند که $a \neq 0$. معادله $ax^2 + bx + c = 0$ (شکل استاندارد معادله درجه دو) را می‌خواهیم حل کنیم.

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c = 0 &\leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0 \\ &\leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &\leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{aligned}$$

اون چیزی که زیر رادیکاله، مهمه.

اگر عدد منفی بشود، معادله جواب ندارد.

اگر عدد مثبت بشه، معادله دو جواب دارد.

اگر برابر صفر بشه، معادله یک جواب دارد (در واقع دو جواب برابر).

عدد $b^2 - 4ac$ را دلتای معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ می‌گوییم. Δ .

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

در انتهای وقت، اشاره‌ای سریعی هم کردیم به روش حل معادله درجه دو با استفاده از تجزیه. در تمرین‌ها بیشتر می‌توانید به این موضوع بپردازید.

تمرین‌ها

تمرین ۱ (دست‌گرمی): همه معادله‌هایی که بالا حل کردیم را، این بار با فرمول هم حل کنید.

تمرین ۲: (قضیه) نشان دهید جمع دو جواب معادله درجه (ریشه معادله درجه دو)، برابر با $-\frac{b}{a}$ و حاصل ضرب دو جواب برابر با $\frac{c}{a}$ است. (راهنمایی: فرمول ریشه‌های معادله درجه دو)

تمرین ۳: تعیین کنید معادلات زیر جواب دارند یا نه؟ در صورتی که جواب دارند، آن جواب‌ها را به دست آورید.

$$\text{معادله‌ی } x^2 + 2x = 5$$

آیا معادله‌ی $x^2 - 3x + 10 = 0$ جواب دارد؟

$$\text{(الف) } x^2 - 5x + 1 = 0$$

$$\text{(ب) } x^2 + x + 1 = 0$$

$$\text{(ج) } x^4 - x = 0$$

$$\text{(د) } 2x^2 - 3x + 1 = 0$$

تمرین ۴: معادله‌های $x^2 + 5x + 6 = 0$ و $6x^2 + 5x + 1 = 0$ را به هر روشی که دوست دارید (مربع کامل سازی، فرمول درجه دو، تجزیه) حل کنید. آیا بین جواب‌های این دو معادله ارتباطی می‌بینید؟ سعی کنید مسئله را در حالت کلی هم حل کنید. یعنی برای اعداد a, b, c که a, c صفر نیستند، ارتباط بین ریشه‌های دو معادله $ax^2 + bx + c = 0$ و $cx^2 + bx + a = 0$ را کشف و اثبات کنید.

1. Solve each of the following quadratic equations by factorization method:

(i) $\sqrt{3}x^2 + 10x + 8\sqrt{3} = 0$

(ii) $x^2 - 2ax + a^2 - b = 0$

(iii) $x^2 + \left(\frac{ab}{c} - \frac{c}{ab}\right)x - 1 = 0$

(iv) $x^2 - 4\sqrt{2}x + 6 = 0$

(CHINA/2006) Solve the equation $2006x^2 + 2007x + 1 = 0$

1. Solve each of the following quadratic equation by quadratic formula:

(i) $2x^2 - 3x + 3 = 0$

(ii) $-x^2 + \sqrt{2}x - 1 = 0$

(iii) $-4x^2 + \sqrt{5}x - 3 = 0$

(iv) $3x^2 + \sqrt{2}x + 5 = 0$

۹. $m \neq 2$ را یک عدد حقیقی داده شده بگیرید. معادله $(m - 2)x^2 - (m + 3)x - 2m - 1 = 0$ را حل کنید.

تذکر: منظور از ریشه مضاعف، دو ریشه حقیقی برابر برای معادله درجه دو، یا همان یک ریشه داشتن معادله درجه دو است.

۳. فرض کنید b, c دو عدد حقیقی ناصفر باشند. معادله درجه دوی زیر را حل کنید:

$$x^2 + \left(\frac{b}{c} - \frac{c}{b}\right)x - 1 = 0$$

۴. فرض کنید a, b دو عدد حقیقی باشند که $a + b \neq 0$. معادله درجه دوی زیر را حل کنید:

$$(a + b)^2x^2 + 6(a^2 - b^2)x + 9(a - b)^2 = 0$$

۵. فرض کنید k یک عدد طبیعی داده شده باشد. همه اعداد حقیقی x را بیابید که

$$x^2 + (x + 1)^2 + \dots + (x + k)^2 = (x + (k + 1))^2 + (x + (k + 2))^2 + \dots + (x + 2k)^2$$

۶. فرض کنید a, b, c, d اعداد حقیقی باشند. نشان دهید ممکن نیست معادله زیر دارای دو ریشه حقیقی متمایز باشد:

$$(a^2 + b^2)x^2 + 2(ab + cd)x + (c^2 + d^2) = 0$$

بین a, b, c, d چه رابطه‌ای برقرار باشد که این معادله دارای ریشه مضاعف باشد؟

۷. نشان دهید ریشه‌های معادله زیر همیشه حقیقی هستند:

$$(x - a)(x - b) + (x - b)(x - c) + (x - c)(x - a) = 0$$

و نیز تعیین کنید چه وقت این معادله دارای ریشه مضاعف است.

۸. فرض کنید $a, b, c > 0$ و معادله درجه دوی $(c + a)x^2 + 2bx + (c - a) = 0$ دو ریشه حقیقی برابر

داشته باشد. نشان دهید سه پاره‌خط با طول‌های a, b, c یک مثلث قائم‌الزاویه تشکیل می‌دهند.

۲۷. معادله $(x^2 - x - 1)^{x^2 - 4x + 3} = 1$ را حل کنید.

تمام مقادیر m را که معادله $x^2 - x + m = 0$ به ازای آنها دارای دو جواب است بیابید.

۳۰. a, b, c اعداد حقیقی متمایز ناصفر هستند. نشان دهید ممکن نیست هر سه معادله $ax^2 + 2bx + c = 0$ ، $bx^2 + 2cx + a = 0$ و $cx^2 + 2ax + b = 0$ دارای ریشه حقیقی مضاعف باشند.

۳۱. p, q_1, q_2 اعداد حقیقی هستند که داریم $p = q_1 + q_2 + 1$. نشان دهید حداقل یکی از معادلات درجه دوی $x^2 + px + q_1 = 0$ و $x^2 + px + q_2 = 0$ دارای دو ریشه حقیقی متمایز است.

۳۲. برای اعداد ناصفر x, y می‌دانیم $x^2 + 3y^2 = 8xy$. همه مقادیر ممکن برای $\frac{x}{y}$ را بیابید.

۳۳. معادله $(x^2 - 2x)^2 + 4(x^2 - 2x) = 5$ را حل کنید.

۳۴. معادله $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) - 1 = 0$ را حل کنید.

۳۵. معادله $x^2 + 2x + 5 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$ را حل کنید.

۳۶. معادله $\frac{x^2}{3} + \frac{48}{x^2} = 10\left(\frac{x}{3} - \frac{4}{x}\right)$ را حل کنید.

۳۷. معادله $4^x = 2^x + 12$ را حل کنید.