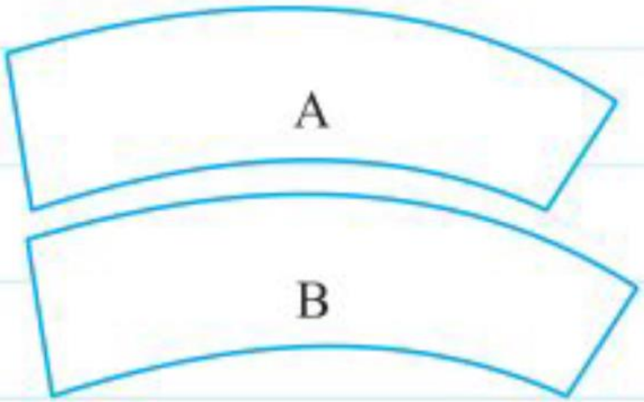
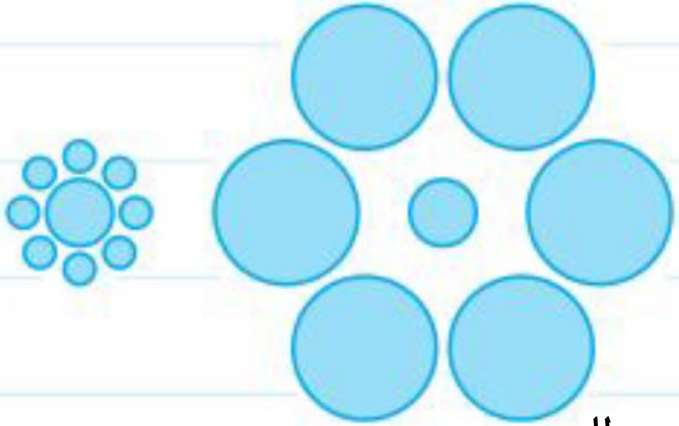
۱ «استدلال» یعنی دلیل‌آوردن و استفاده از دانسته‌های قبلی، برای فهمیدن چیزهایی که نمی‌دانیم.

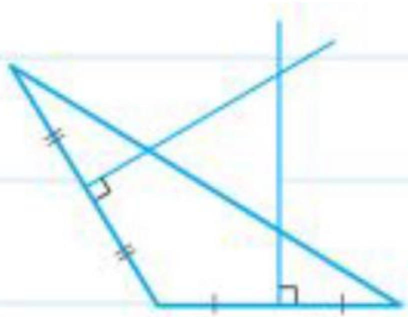
۲ بررسی چند مورد و نتیجه‌گیری کلی کار غلطی است؛ مثل این استدلال محسن: «من مطمئنم تیم مورد علاقهٔ من امروز می‌بازد؛ چون هر بار که به ورزشگاه رفته‌ام، تیم مورد علاقه‌ام باخته است.» یا این استدلال حمید: «علی از حسن بزرگ‌تر است؛ چون در تمام خانواده‌هایی که (من دیده‌ام) و دو فرزند به نام‌های علی و حسن داشته‌اند، علی فرزند بزرگ‌تر بوده است.»

۳ برای استدلال‌کردن نمی‌توان به حواسی مثل بینایی یا حس لامسه اطمینان کرد؛ مثلاً برخلاف ظاهر، قطعات A و B با هم مساوی‌اند و دایره‌های داخلی دو شکل زیر با هم برابرند.

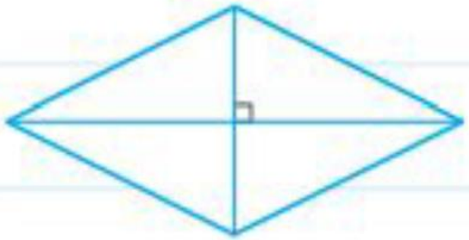




دکتر مرتضی طاهری



۴ نتیجه‌گیری (استدلال)های غلط را می‌شود با آوردن مثال نقض رد کرد؛ مثلاً شکل روبه‌رو، مثال نقضی است برای این گزاره که «محل برخورد عمودمنصف‌ها، حتماً داخل مثلث است.»



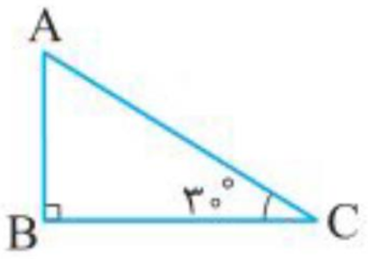
$p \to q$

$q \to p$

۵ عکس نتیجه‌گیری‌ها لزوماً درست نیست؛ مثلاً اگر «همهٔ فیلم‌های جنگی که من دیده‌ام، جذاب بوده باشند»، دلیل بر این نیست که «تمام فیلم‌های جذاب، جنگی‌اند.» و یا از جملهٔ «در هر مربع، قطرها بر هم عمودند.» نمی‌توان نتیجه گرفت «اگر قطرهای یک چهارضلعی بر هم عمود باشند، شکل مربع است.» مثال نقض آن نیز لوزی است:

۶ در استدلال کردن، فقط می‌توان از اطلاعات مسئله یا همان «فرض» و حقایق و اصولی که (از قبل) از درستی آن‌ها مطمئن هستیم استفاده کرد. به خواستهٔ مسئله، یعنی آن چیزی که می‌خواهیم مورد بررسی قرار دهیم، «حکم» می‌گوییم.

اولین قدم در حل مسئله فهم مسئله و تشخیص فرض و حکم است؛ مثلاً در مسئلهٔ «در هر مثلث قائم‌الزاویه با یک زاویهٔ 30° می‌توان گفت: «ضلع روبه‌رو به این زاویه نصف وتر است.» فرض و حکم این‌طوری است:



ح

فرض: ۱ــ مثلث قائم الزاویه است.
۲ــ یک زاویهٔ مثلث، 30° است.

حکم: ضلع روبه‌رو به زاویهٔ 30° نصف وتر است.

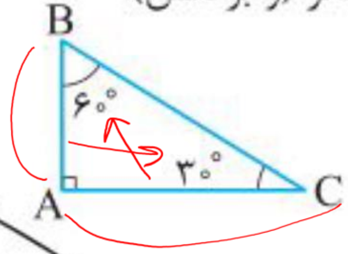
تذکر: اشتباه بسیار رایج در بین دانش‌آموزان این است که از حکم یا نتایج حکم برای نتیجه‌گیری و اثبات حکم استفاده می‌کنند! نخندید! اگر شما هم تمرین کافی نداشته باشید احتمالاً به این دام می‌افتید.

چند نکته برای یادآوری

الان که مقدمات استدلال‌کردن را یاد گرفتیم، وارد دریای مسئله‌های هندسی می‌شویم. دقت کنید تا خوب استدلال کنید و غرق نشوید!

قبل از این‌که وارد بحث هم‌نهشتی مثلث‌ها شویم، چندتا نکته می‌آوریم که خیلی مهم‌اند و پرکاربرد:

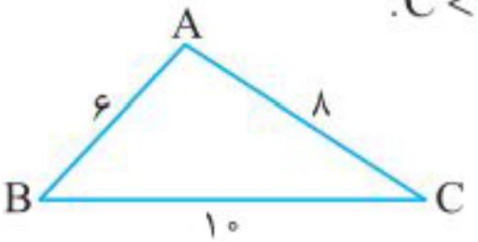
نکتهٔ واجب: در هر مثلث، ضلع روبه‌رو به زاویهٔ بزرگ‌تر، بزرگ‌تر است از ضلع روبه‌رو به زاویهٔ کوچک‌تر (و برعکس).



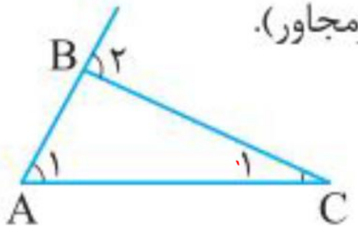
مثلاً در شکل روبه‌رو با توجه به مقدار زاویه‌ها می‌توان گفت $\hat{C} < \hat{B} < \hat{A}$، پس نتیجه می‌گیریم:

$$\overline{AB} < \overline{AC} < \overline{BC}$$

عکس نکتهٔ بالا را می‌توان در مثال زیر دید. با توجه به این‌که $AB < AC < BC$، می‌توان نتیجه گرفت که $\hat{C} < \hat{B} < \hat{A}$.



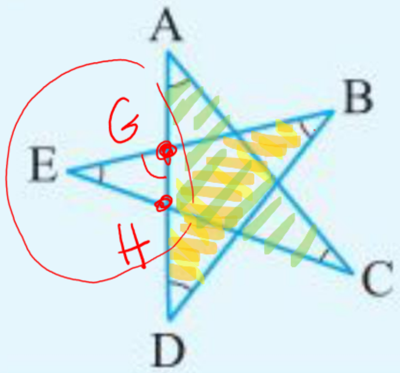
نکتهٔ واجب: در هر مثلث، اندازهٔ هر زاویهٔ خارجی برابر می‌شود با مجموع دو زاویهٔ داخلی دیگر (غیرمجاور).



$$\hat{B}_2 = \hat{A}_1 + \hat{C}_1$$

دکتر مرتضی طاهری

تست: در شکل مقابل، مقدار $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+\hat{D}+\hat{E}$ کدام است؟



۱) ۹۰°
۲) ۱۸۰°
۳) ۲۷۰°
۴) ۳۶۰°

$\hat{G} = \hat{B} + \hat{D}$

$\hat{H} = \hat{A} + \hat{C}$

$\hat{E} + \hat{G} + \hat{H} = 180$

$\hat{E} + \hat{B} + \hat{D} + \hat{A} + \hat{C} = 180$

G خارجی : BDG

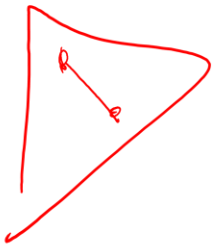
H خارجی : ACH

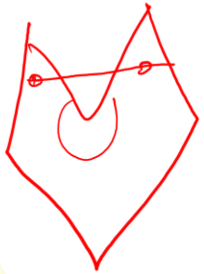
دکتر مرتضی طاهری

نکتهٔ واجب: چندضلعی‌های محدب را در سال هفتم و نهم به دو صورت تعریف کردیم: (چندضلعی‌های غیرمحدب می‌شوند مقعر)

(۱) اگر همهٔ زاویه‌های داخلی یک چندضلعی کوچک‌تر از ۱۸۰° باشند، به آن چندضلعی محدب می‌گوییم.

(۲) اگر هر پاره‌خطی که دو نقطهٔ دلخواه درون یک چندضلعی را به هم وصل می‌کند، به طور کامل درون آن چندضلعی قرار گیرد، به آن چندضلعی محدب می‌گوییم.





نکتهٔ واجب:

① مجموع زاویه‌های داخلی هر nضلعی (محدب و مقعر فرقی ندارد) برابر $180(n-2)$ درجه است.

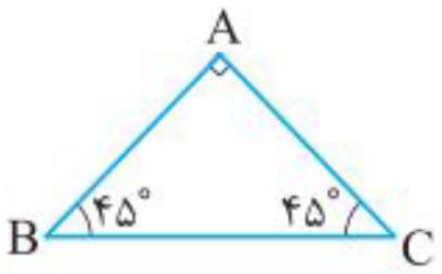
② مجموع زاویه‌های خارجی هر nضلعی **محدب**، برابر ۳۶۰ درجه است.

③ در هر nضلعی، هر رأس $(n-3)$ قطر (غیر از خودش و دوتا بغلی‌هایش) دارد، پس تعداد کل قطرهای آن $\frac{n(n-3)}{2}$ است.

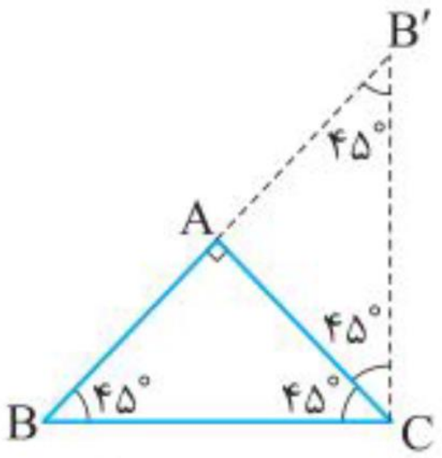
دکتر مرتضی طاهری

مفهوم تعمیم‌دادن

شکل مقابل را ببینید:



با استفاده از این‌که $\hat{B} = ۴۵^\circ$ و $BA \perp AC$، خیلی راحت می‌توانیم اثبات کنیم که اگر رأس B نسبت به ضلع دیگر (یعنی AC) قرینه شود، شکل کلی هم، یک مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین می‌شود؛ یعنی این‌طوری:



$$\hat{C} = ۴۵ + ۴۵ = ۹۰^\circ$$

آیا می‌شود بدون اثبات پذیرفت که این ویژگی برای رأس C هم وجود دارد؟ بله می‌شود. چون تمام ویژگی‌هایی که باعث شد این نتیجه را برای رأس B بگیریم (یعنی $\hat{B} = ۴۵^\circ$ و $BA \perp AC$) برای رأس C هم وجود دارد (یعنی $\hat{C} = ۴۵^\circ$ و $CA \perp AB$). به این کار می‌گوییم تعمیم‌دادن.

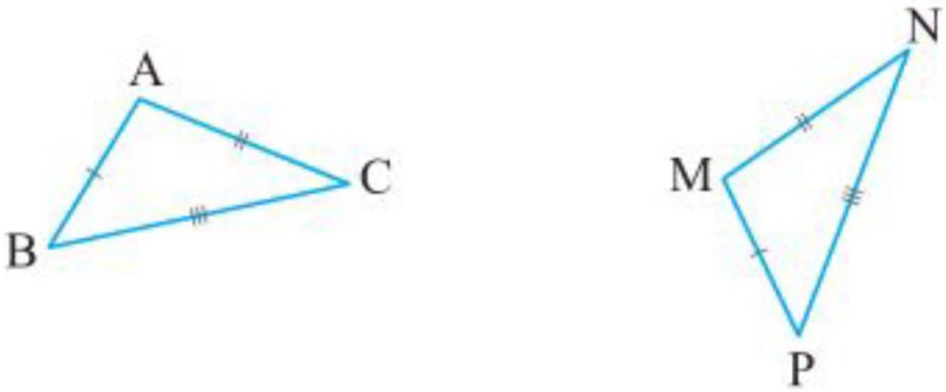
آیا می‌شود این نتیجه‌گیری را به رأس A هم تعمیم داد؟ مطمئناً خیر. چون $\hat{A} \neq ۴۵^\circ$ و AC عمود نیست بر BC. خلاصه این‌که اگر یکی از شرایط (فرض‌ها) نتیجه‌گیری مهیا نباشد، تعمیم‌دادن ممکن نیست![1]

الان که مقدمات استدلال‌کردن و حل مسئله در هندسه را مرور کردیم، وارد دریای مسئله‌های هندسی می‌شویم. دقت کنید تا خوب استدلال کنید وگرنه خطر غرق‌شدن وجود دارد!

هم‌نهشتی مثلث‌ها

هر وقت سه ضلع و سه زاویه از $\overset{\Delta}{ABC}$ برابر باشند با سه ضلع و سه زاویه از $\overset{\Delta}{MNP}$ می‌گوییم که این دوتا مثلث هم‌نهشت هستند. به عبارت دیگر به مثلث‌هایی که کاملاً قابل‌انطباق بر هم باشند، هم‌نهشت می‌گوییم. یادمان هست که در حالت‌های زیر، مثلث‌ها هم‌نهشت بودند:

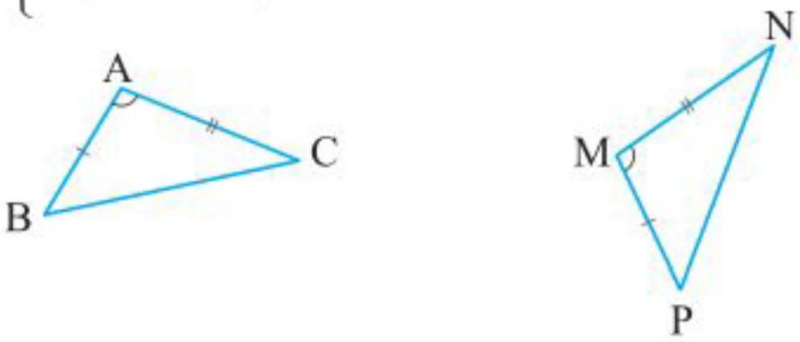
۱) برابری سه ضلع یا (ض‌ض‌ض)



اگر سه ضلع دو مثلث با هم برابر باشند، آن مثلث‌ها حتماً هم‌نهشت‌اند. در این حالت زاویه‌های روبه‌رو به ضلع‌های برابر، با هم مساوی‌اند.

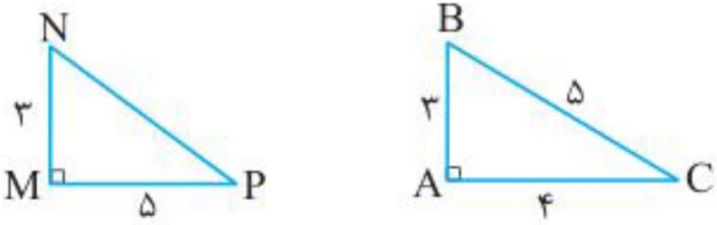
$$\begin{cases} AB = MP \Rightarrow \hat{C} = \hat{N} \\ AC = MN \Rightarrow \hat{B} = \hat{P} \\ BC = PN \Rightarrow \hat{A} = \hat{M} \end{cases}$$

(۲) برابری دو ضلع و زاویهٔ بین یا (ض ز ض)



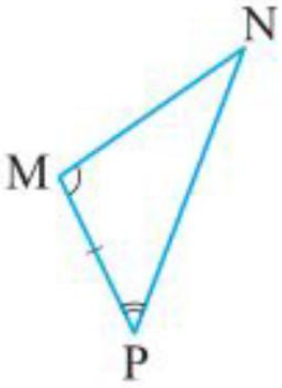
در این حالت دقت کنید که زاویهٔ برابر حتماً باید بین دو ضلع باشد، مثلاً در مثال زیر دو ضلع و یک زاویه از $\overset{\Delta}{ABC}$ و $\overset{\Delta}{MNP}$ با هم برابرند ولی مثلث‌ها هم‌نهشت نیستند.

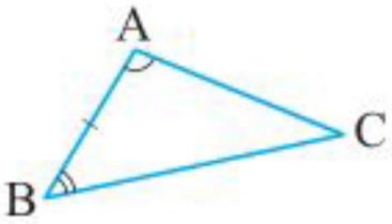
$$\begin{cases} BA = MN = ۳ \\ BC = MP = ۵ \quad \not\Rightarrow \quad \overset{\Delta}{ABC} \cong \overset{\Delta}{MNP} \\ \hat{A} = \hat{M} \ (\text{زاویه‌های غیربین}) \end{cases}$$



در واقع زاویهٔ بین ضلع‌های مساوی، $\hat{B}$ و $\hat{M}$ است که با هم برابر نیستند.

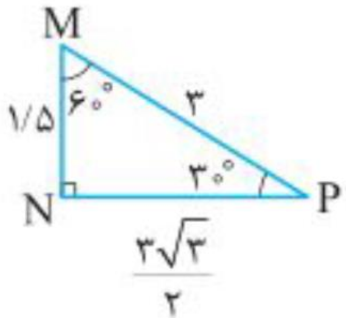
۳ برابری دو زاویه و ضلع بین آن‌ها یا (ز ض ز)

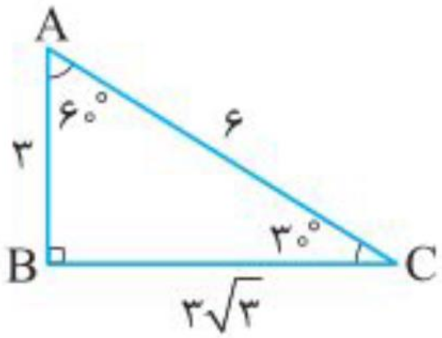




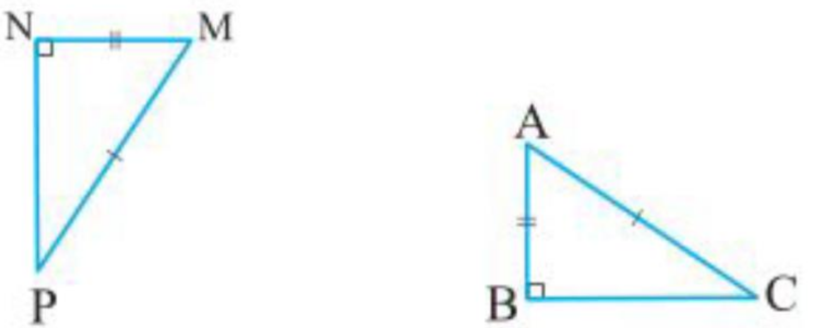
در این حالت هم باید دقت کنید که ضلع برابر دقیقاً بین زاویه‌های برابر باشد و به عنوان مثال این‌طوری نباشد:

$$\begin{cases} \hat{A} = \hat{M} = ۶۰^\circ \\ \hat{B} = \hat{N} = ۹۰^\circ \Rightarrow \overset{\Delta}{ABC} \cong \overset{\Delta}{MNP} \\ AB = MP \ (\text{ضلع غیر بین زاویه‌های برابر}) \end{cases}$$

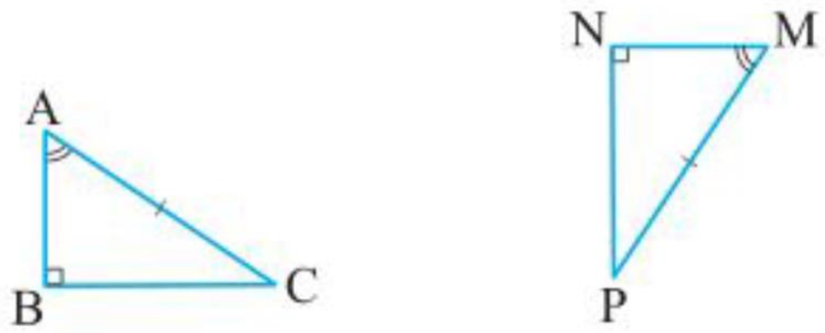


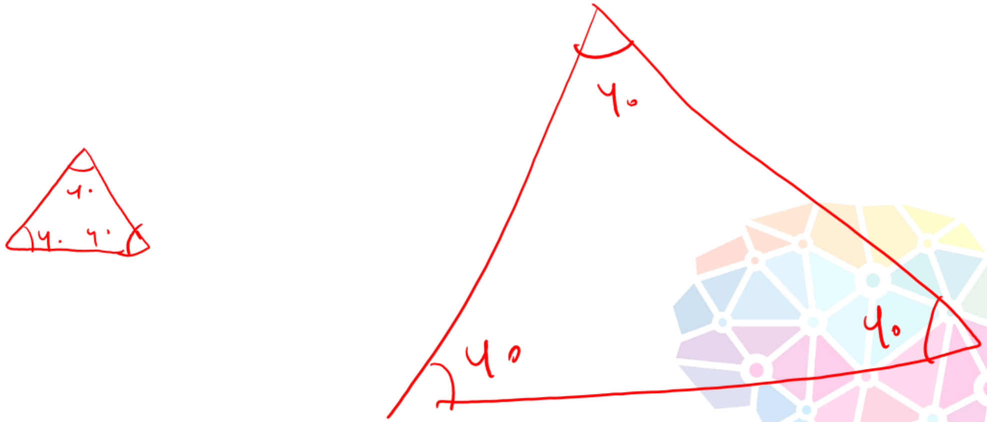


۴ برابری وتر و یک ضلع (و ض)

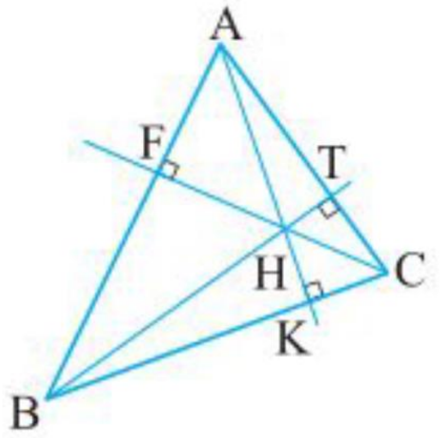


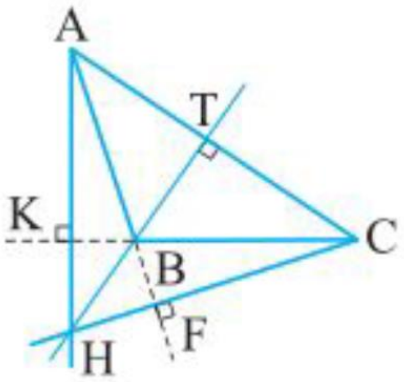
۵ برابری وتر و یک زاویهٔ حاده (و ز)

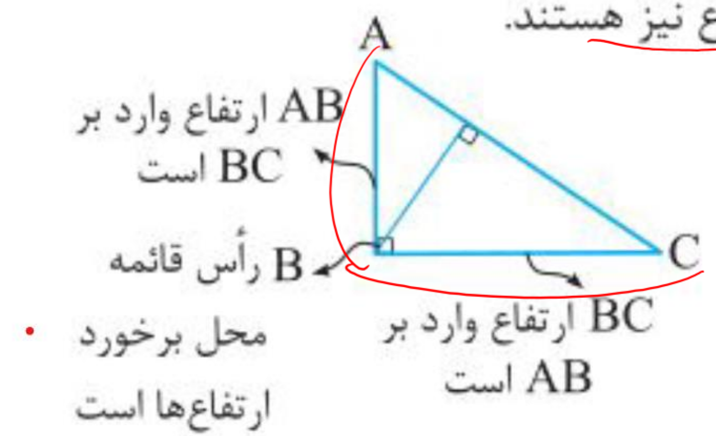




الف) ارتفاع: ارتفاع خطی است که از یک رأس به ضلع روبه‌رو (یا امتداد آن) عمود می‌شود. اگر هر سه زاویهٔ مثلث تند (حاده) باشند، تمام ارتفاع‌ها از داخل مثلث عبور می‌کنند ولی اگر یکی از زاویه‌های مثلث باز (منفرجه) باشد، دوتا از ارتفاع‌ها بر امتداد ضلع‌های مقابلشان عمود می‌شوند. اگر مثلث قائم‌الزاویه باشد، اضلاع (غیروتر) ارتفاع نیز هستند.





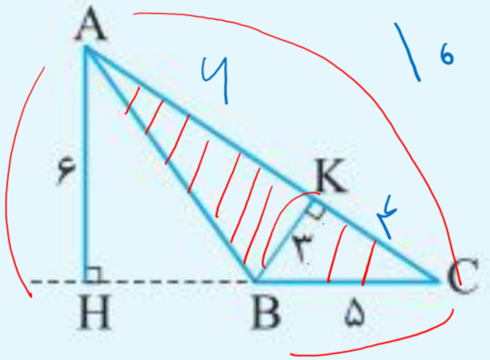


دکتر مرتضی طاهری

تست: در شکل مقابل طول AK کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵

۳) ۶ ۴) ۷



مساحت ABC

$$\frac{\cancel{BK}^{3} \times AC}{2} = \frac{BC \times AH}{2}$$

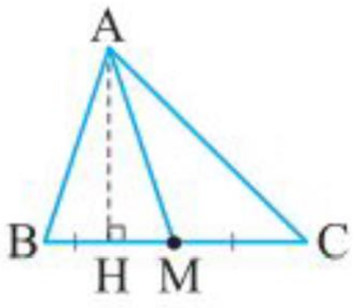
$$\frac{3}{\cancel{2}} AC = \frac{5 \times 6}{\cancel{2}} \rightarrow AC = 10$$

$$10 - 4 = 6$$

دکتر مرتضی طاهری

ب) میانه: میانه خطی است که از یک رأس به وسط ضلع روبه‌رو وصل می‌شود. میانه‌ها حتماً داخل مثلث همرس‌اند.

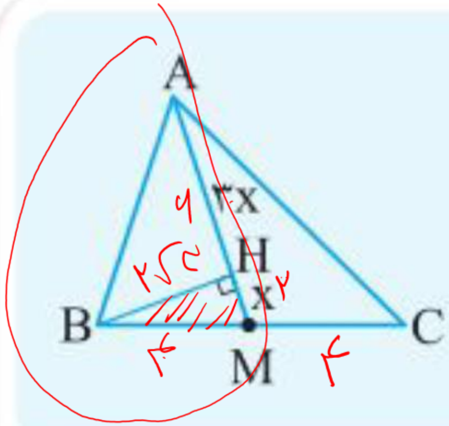
① هر میانهٔ هر مثلث، مساحت آن را نصف می‌کند، زیرا:



AH ارتفاع رأس A در $\overset{\Delta}{ABM}$ و $\overset{\Delta}{AMC}$ است، از طرفی چون قاعدهٔ این ارتفاع، در دو مثلث (یعنی MC و BM) با هم برابرند؛ پس داریم:

$$\boxed{S_{\overset{\Delta}{ABM}} = S_{\overset{\Delta}{AMC}}}$$

تست: در $\overset{\Delta}{ABC}$ از رأس B به میانهٔ AM عمود رسم کرده‌ایم. اگر $AH = ۳HM$ و داشته باشیم: $BC = AM = ۸$.
مساحت $\overset{\Delta}{ABC}$ کدام است؟



۱) $۱۶\sqrt{۳}$ ✓
۲) $۱۸\sqrt{۳}$
۳) $۱۲\sqrt{۳}$
۴) $۸\sqrt{۳}$

$BM = \frac{BC}{۲} = \frac{۸}{۲} = ۴$

۳	۶
۱	۲
۴	۸

$\rightarrow HM = ۲$

$S_{\overset{\Delta}{ABM}} = ۸\sqrt{۳}$

مساحت BHM:

$S_{\overset{\Delta}{BHM}} = \frac{۲\sqrt{۳} \times ۲}{۲} = ۲\sqrt{۳}$

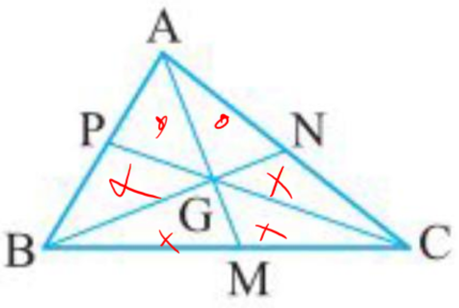
$BH^۲ + ۲^۲ = ۴^۲$

$BH^۲ = ۱۲ \rightarrow BH = ۲\sqrt{۳}$

$S_{\overset{\Delta}{ABH}} = \frac{۶ \times \cancel{۲}\sqrt{۳}}{\cancel{۲}} = ۶\sqrt{۳}$

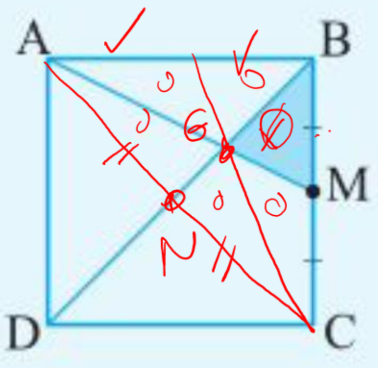
دکتر مرتضی طاهری

(۲) اگر هر سه میانهٔ مثلث را رسم کنیم، ۶ مثلث هم‌مساحت خواهیم داشت.



نکتهٔ (۲) را خودتان می‌توانید از نکتهٔ (۱) نتیجه بگیرید.

تست: در شکل روبه‌رو، ABCD مربع و نقطهٔ M وسط ضلع BC است. مساحت قسمت رنگی چه کسری از مساحت مربع است؟ (علامه طباطبایی)



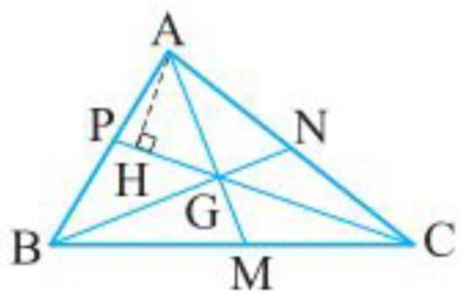
۱) $\frac{۱}{۹}$ ۲) $\frac{۱}{۱۲}$

۳) $\frac{۱}{۱۵}$ ۴) $\frac{۱}{۱۶}$

مثلث BGM ، $\frac{1}{4}$ مساحت مثلث ABC

$\frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$

دکتر مرتضی طاهری

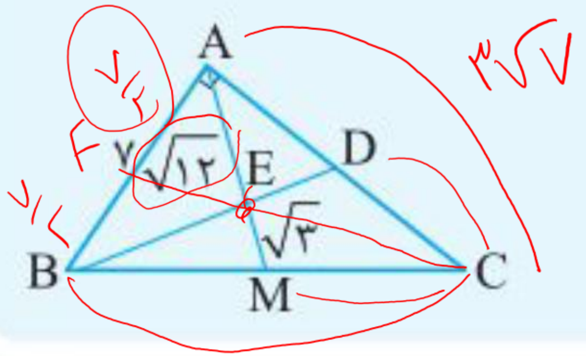


۳ میانه‌های مثلث، همدیگر را به نسبت ۲ به ۱ (از سمت رأس) قطع می‌کنند:

از نکتهٔ (۲) خیلی راحت معلوم می‌شود که مساحت $\overset{\Delta}{AGC}$ دو برابر مساحت $\overset{\Delta}{AGP}$ است. از طرفی می‌دانیم که ارتفاع رأس A در این دو مثلث یکی است (AH). پس نتیجه می‌شود: $CG = 2GP$.

حالا خودتان دلیل بیاورید که $AG = 2GM$ و $BG = 2GN$.

تست: در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\hat{A} = 90^\circ$)، خط BD میانهٔ AM را به دو قسمت به طول‌های $\sqrt{3}$ و $\sqrt{12}$ قطع کرده است. اگر $MC = \frac{4}{3}DC$ و $AB = 7$ باشد، طول میانهٔ رأس C کدام است؟



۱) $\frac{\sqrt{231}}{2}$

۲) $\frac{\sqrt{251}}{2}$

۳) $\frac{\sqrt{280}}{2}$

۴) $\frac{\sqrt{301}}{2}$

$MC = \frac{4}{3}DC$

$2MC = 2\left(\frac{4}{3}DC\right)$

$BC = \frac{4}{3}AC$

$\frac{AE}{EM} = 2$

$\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

در مثلث ABC

$BC^2 = AB^2 + AC^2$

$\left(\frac{4}{3}AC\right)^2 = 49 + AC^2 \rightarrow \frac{7}{9}AC^2 = 49 \rightarrow AC = 3\sqrt{7}$

دکتر مرتضی طاهری

در مثلث ACF :

$$CF^2 = \left(\frac{7}{2}\right)^2 + (3\sqrt{7})^2$$

$$CF^2 = \frac{49}{4} + 63 = \frac{301}{4} \rightarrow CF = \frac{\sqrt{301}}{2}$$