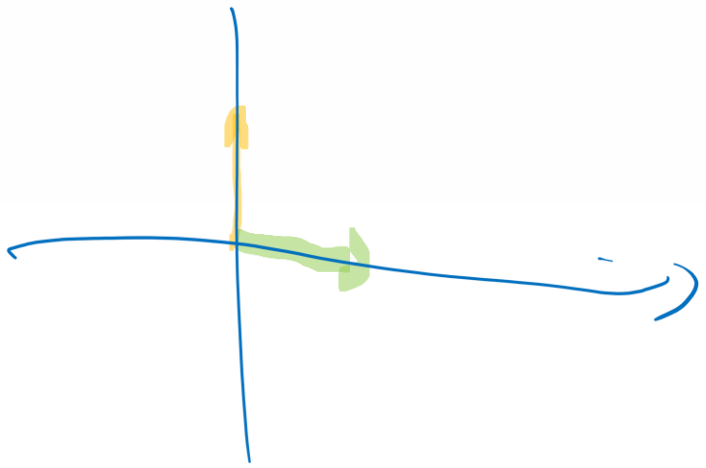
بردارهای موازی با محورهای مختصات و نیمسازها

۱) اگر عرض مختصات یک بردار صفر باشد (عرض تمام نقاط روی بردار برابر باشد)، بردار موازی محور طول‌هاست.

۲) اگر طول مختصات یک بردار صفر باشد (طول تمام نقاط روی بردار برابر باشد)، بردار موازی محور عرض‌هاست.

۳) اگر طول و عرض یک بردار برابر باشد، بردار موازی نیمساز ربع اول و سوم است.

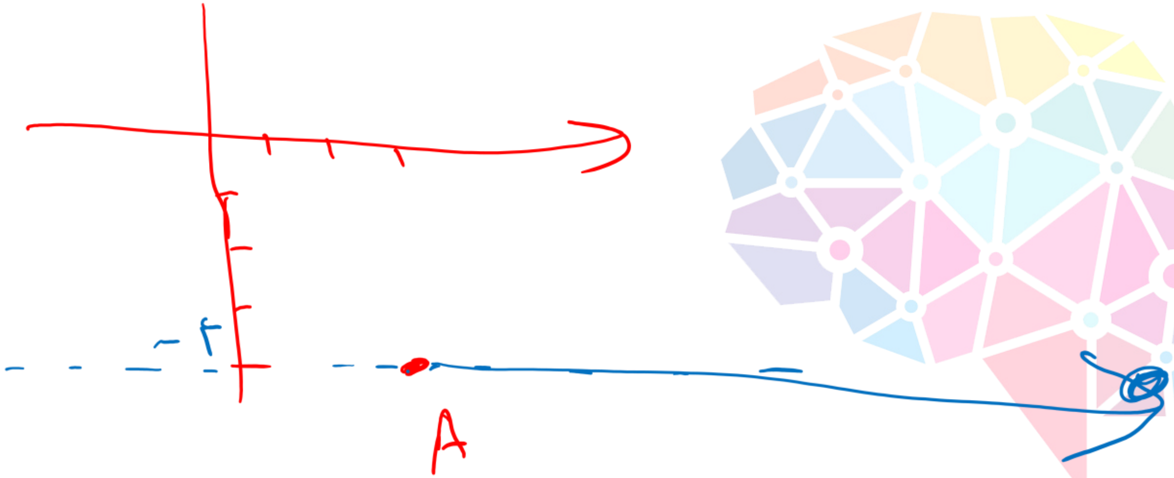
۴) اگر طول و عرض یک بردار قرینه باشند، بردار موازی نیمساز ربع دوم و چهارم است.



مرتضی طاهری

تست: اگر $\begin{bmatrix} ۳ \\ -۴ \end{bmatrix} = A$ نقطهٔ ابتدای یک بردار باشد. نقطهٔ انتهای آن کدام‌یک از گزینه‌های زیر باشد تا بردار موازی محور طول‌ها شود؟

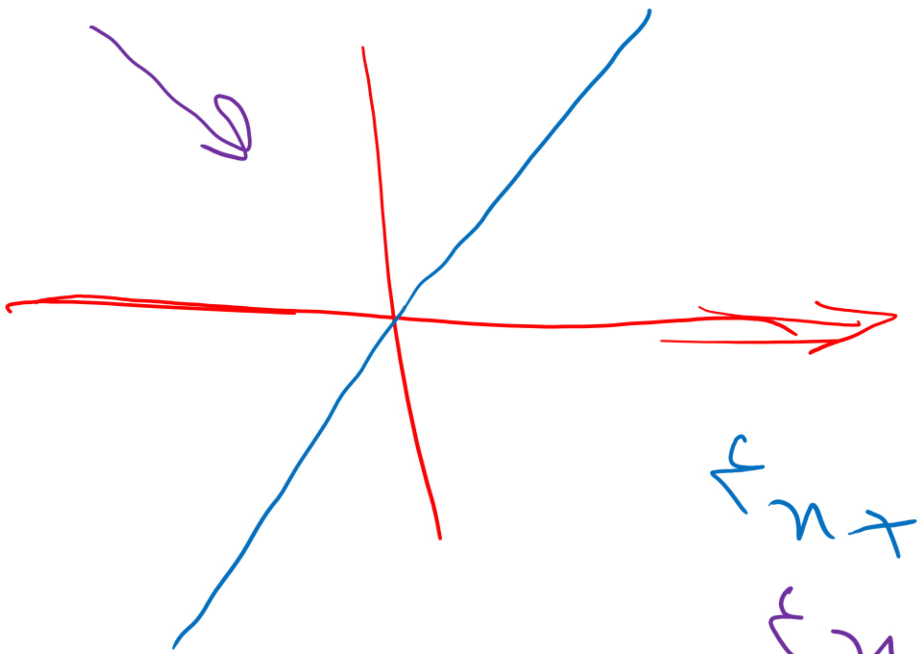
۱) $\cancel{\begin{bmatrix} -۳ \\ ۲ \end{bmatrix}}$ ۲) $\begin{bmatrix} ۱۰ \\ -۴ \end{bmatrix}$ ۳) $\cancel{\begin{bmatrix} ۳ \\ ۱۰ \end{bmatrix}}$ ۴) $\cancel{\begin{bmatrix} -۳ \\ ۴ \end{bmatrix}}$



مرتضی طاهری

تست: اگر بردار $\vec{a} = \begin{bmatrix} ۲x-۶ \\ ۴x+۱۲ \end{bmatrix}$ بر نیمساز ربع اول و سوم عمود باشد، مقدار x برابر با چه عددی است؟

۱) -۸ ۲) ۸ ۳) -۱ ۴) $+۱$



موازی نیمساز ربع دوم و چهارم

طول، عرض قرینه هم هستن

$$4x+12 = -(2x-6)$$

$$4x+12 = -2x+6$$

$$6x = -6 \rightarrow x = -1$$

مرتضی طاهری

بردارهای عمود

اگر دو بردار $\vec{a} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ و $\vec{b} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$ بر هم عمود باشند، آن‌گاه:

$$x_1x_2 + y_1y_2 = 0$$

مرتضی طاهری

تست: اگر دو بردار $\vec{a}=\begin{bmatrix}۲x-۱\\ ۳\end{bmatrix}$ و $\vec{b}=\begin{bmatrix}۲\\ x+۳\end{bmatrix}$ بر هم عمود باشند، مقدار x برابر است با:

۱) ۱
۲) ۱−
۳) ۲
۴) ۲−

$۲(۲x-۱)+(x+۳)\times ۳=۰$

$۴x-۲+۳x+۹=۰$

$۷x+۷=۰$

$۷x=-۷ \longrightarrow x=-۱$

مرتضی طاهری

بردارهای مساوی (هم‌سنگ یا هم‌ارز)

برای بردارهای مساوی دو تعریف می‌توان ارائه داد:

۱) دو بردار در حالتی با هم مساوی‌اند که هم‌راستا، هم‌جهت و هم‌اندازه باشند.

۲) دو بردار در حالتی با هم مساوی‌اند که مختصات آن‌ها با هم یکی باشد.

مرتضی طاهری

تست: اگر دو بردار $\vec{a} = \begin{bmatrix} m-3 \\ 2n-4 \end{bmatrix}$ و $\vec{b} = \begin{bmatrix} 2m+6 \\ 4n-12 \end{bmatrix}$ هم‌سنگ باشند. مقدار $m+n$ برابر با چه عددی است؟

۱) ۵ ۲) -۴ ۳) -۵ ۴) ۴

$2m+6 = m-3 \longrightarrow 2m - m = -3-6$

$\boxed{m = -9}$

$4n-12 = 2n-4 \longrightarrow 4n-2n = -4+12$

$2n = 8 \longrightarrow n=4$

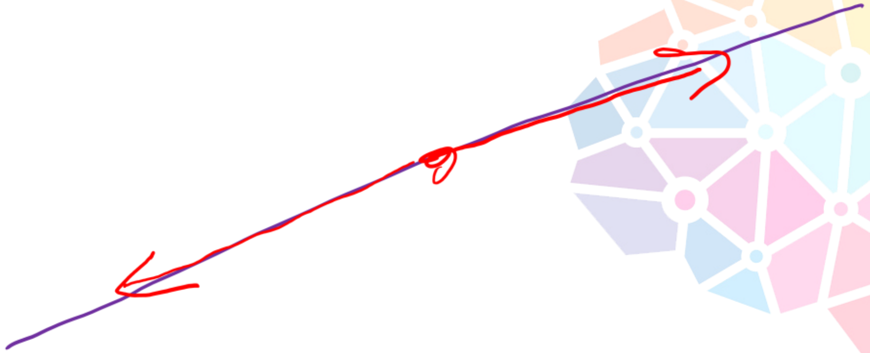
مرتضی طاهری

بردارهای قرینه

دو بردار a و b در یکی از دو حالت زیر می‌توانند قرینهٔ یکدیگر باشند ($\vec{a} = -\vec{b}$):

۱) دو بردار در صورتی قرینهٔ یکدیگرند که هم‌راستا، هم‌اندازه و خلاف جهت هم باشند.

۲) دو بردار در صورتی قرینهٔ یکدیگرند که طول آن‌ها قرینهٔ هم و عرض آن‌ها نیز قرینهٔ هم باشند (توجه داشته باشید که $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$).



مرتضی طاهری

تست: اگر دو بردار $\vec{a}=\begin{bmatrix} x-۱ \\ ۳y \end{bmatrix}$ و $\vec{b}=\begin{bmatrix} -۵x-۲۳ \\ y+۴ \end{bmatrix}$ قرینهٔ یکدیگر باشند. $x-y$ کدام است؟

۱) -۴
۲) -۵
۳) -۶
۴) -۷

$$-۵x-۲۳=-(x-۱)$$

$$-۵x-۲۳=-x+۱ \rightarrow -۴x=۲۴$$

$$\boxed{x=-۶}$$

$$y+۴=-۳y \rightarrow ۴y=-۴ \rightarrow \boxed{y=-۱}$$

$$-۶-(-۱)=-۵$$

مرتضی طاهری

قرینهٔ یک بردار نسبت به محورها، مبدأ و نیمسازها

قرینهٔ بردار نسبت به نیمسازها، مبدأ و محورهای مختصات مثل قرینهٔ نقطه نسبت به این خطوط و نقاط است:

۱ قرینهٔ بردار $\vec{a} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ نسبت به محور طول (یا هر خط افقی) برابر با $\begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$ است.

۲ قرینهٔ بردار $\vec{a} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ نسبت به محور عرض (یا هر خط عمودی) برابر با $\begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix}$ است.

۳ قرینهٔ بردار $\vec{a} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ نسبت به مبدأ مختصات برابر با $\begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix}$ است.

۴ قرینهٔ بردار $\vec{a} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ نسبت به نیمساز ربع اول و سوم برابر با $\begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}$ است.

۵ قرینهٔ بردار $\vec{a} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ نسبت به نیمساز ربع دوم و چهارم برابر با $\begin{bmatrix} -y \\ -x \end{bmatrix}$ است.

مرتضی طاهری

زاویهٔ بین دو بردار

برای به دست آوردن زاویهٔ بین دو بردار به نکات زیر توجه داشته باشید:

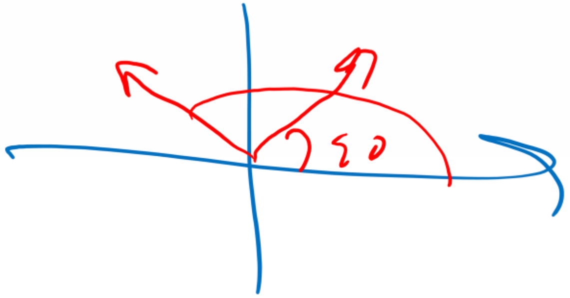
① زاویهٔ بین هر دو بردار مساوی صفر درجه است.

② زاویهٔ بین هر دو بردار قرینه ۱۸۰ درجه است.

③ اگر برداری، موازی محور x و بردار دیگری موازی محور y باشد، زاویهٔ بین آن‌ها ۹۰ درجه است.

④ اگر بردار $\vec{a}$ موازی یکی از نیمسازها و بردار $\vec{b}$ موازی محور طول باشد، زاویهٔ بین آن‌ها ۴۵ یا ۱۳۵ درجه است. (با توجه به جهت بردارها امکان دارد ۲ حالت پیش آید.)

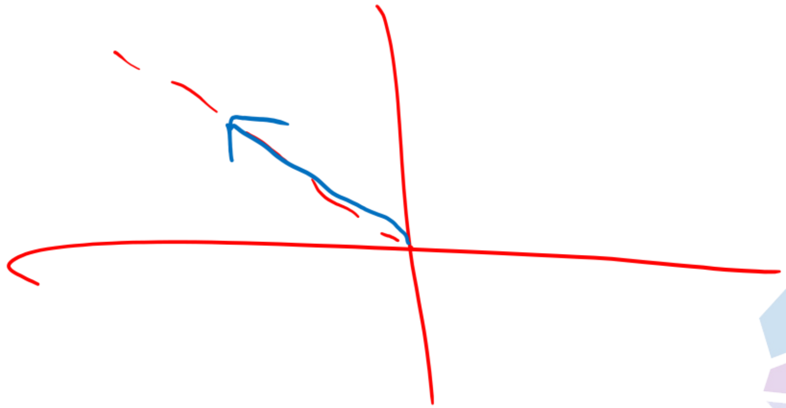
(قسمت ۴ برای محور yها به طور مشابه تعریف می‌شود.)



مرتضی طاهری

تست: اگر بردار $\vec{a} = \begin{bmatrix} -m-۳ \\ -۲m+۶ \end{bmatrix}$ با جهت مثبت محور x ها زاویهٔ ۱۳۵ درجه بسازد، مقدار m برابر با چه عددی است؟

۱) ۲   ۲) ۱   ۳) ۱-   ۴) ۲-



$-۲m+۶ = -(-m-۳)$

$-۲m+۶ = m+۳$

$۳ = ۳m$

$۱ = m$

مرتضی طاهری

بردار انتقال

اگر نقطهٔ $A=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ را با بردار $\vec{e}=\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$ منتقل کنیم، مختصات نقطهٔ انتقال‌یافته برابر با $B=\begin{bmatrix}x+a\\b+y\end{bmatrix}$ است. حال اگر نقطهٔ A را k بار با بردار $\vec{e}$ منتقل کنیم مختصات نقطهٔ جدید برابر است با:

$$A+k\vec{e}=\begin{bmatrix}x+ka\\y+kb\end{bmatrix}$$

مرتضی طاهری

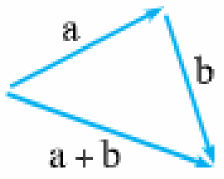
تست: اگر نقطهٔ $A = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۳ \end{bmatrix}$ را ۲۰ بار با بردار $\vec{a} = \begin{bmatrix} x-۵ \\ ۲x-۱۵ \end{bmatrix}$ که موازی نیمساز ربع اول و سوم است منتقل کنیم، مختصات نقطهٔ جدید کدام گزینه است؟

۱) $\begin{bmatrix} ۲۰۱ \\ ۲۰۳ \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} ۵۱ \\ ۵۳ \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} ۱۵۱ \\ ۱۵۳ \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} ۱۰۱ \\ ۱۰۳ \end{bmatrix}$

مرتضی طاهری

جمع بردارها به روش هندسی

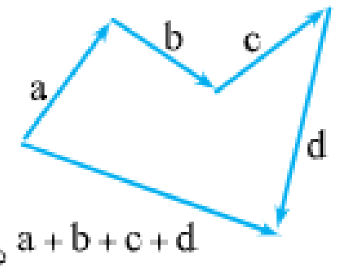
۱) روش مثلثی یا جمع بردارهای متوالی:



اگر ابتدای هر بردار همان انتهای بردار قبل باشد، برداری که ابتدای بردار اول را به انتهای بردار دوم وصل می‌کند، برابر با بردار حاصل‌جمع دو بردار است.

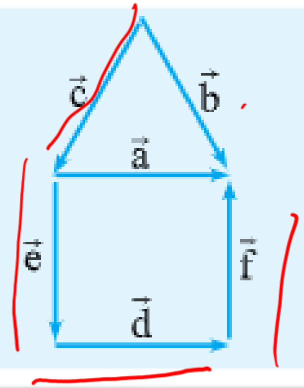
مرتضی طاهری

توجه: این روش برای چند بردار هم قابل استفاده است؛ به این ترتیب که اگر بردارها به صورت متوالی رسم شده باشند، بردار حاصل‌جمع، برابر با برداری است که ابتدای بردار اول را به انتهای بردار آخر وصل می‌کند.



مرتضی طاهری

تست: در شکل مقابل، حاصل‌جمع همهٔ بردارها برابر با کدام گزینه است؟



۱) $\vec{a}-۲\vec{b}$

۲) $\vec{a}+۲\vec{b}$

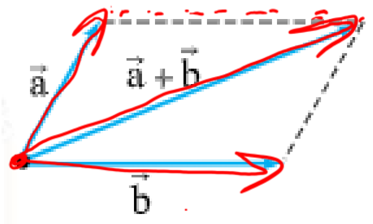
۳) $\vec{b}+۲\vec{a}$

۴) $\vec{b}-۲\vec{a}$

$$\vec{c}+\vec{e}+\vec{d}+\vec{f}=\vec{b}$$

$$\vec{a}+\vec{b}+(\vec{b})=\vec{a}+۲\vec{b}$$

مرتضی طاهری

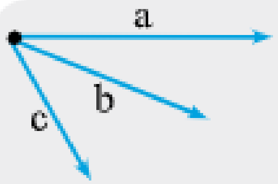


۲) روش متوازی‌الاضلاع یا جمع بردارهای هم‌مبدأ:

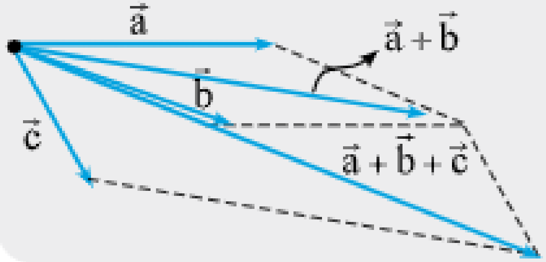
اگر دو بردار از یک نقطه شروع شده باشند، به کمک بردارهای مساوی، یک متوازی‌الاضلاع به اضلاع دو بردار رسم می‌کنیم. بردار حاصل‌جمع برابر با قطری از متوازی‌الاضلاع است که از نقطهٔ شروع دو بردار رسم می‌شود.

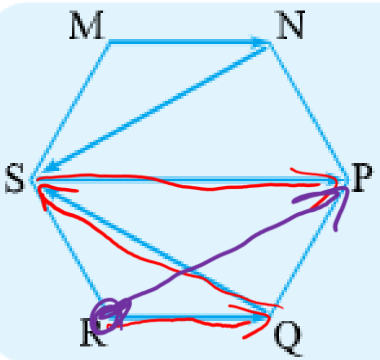
مرتضی طاهری

مثال: حاصل‌جمع بردارهای مقابل را رسم کنید.



پاسخ: ابتدا به روش متوازی‌الاضلاع بردار حاصل‌جمع a و b را رسم می‌کنیم و سپس با در نظر گرفتن بردار $\vec{a}+\vec{b}$ و c و استفادهٔ مجدد از روش متوازی‌الاضلاع، برآیند بردارها را رسم می‌کنیم.





تست: در شکل مقابل شش‌ضلعی، منتظم است. مجموع بردارهای $\overrightarrow{SP}+\overrightarrow{NS}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{RQ}+\overrightarrow{QS}$ برابر با کدام گزینه است؟

۱) $\overrightarrow{SP}$

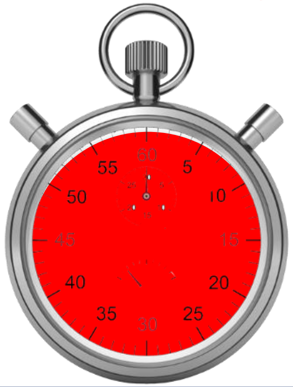
۲) $\overrightarrow{MN}$

۳) $\overrightarrow{RP}$

۴) $\overrightarrow{NS}$

$$\overrightarrow{RQ}+\overrightarrow{QS}+\overrightarrow{SP}=\overrightarrow{RP}$$

$$\cancel{\overrightarrow{RP}}+\cancel{\overrightarrow{NS}}+\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MN}$$



مرتضی طاهری

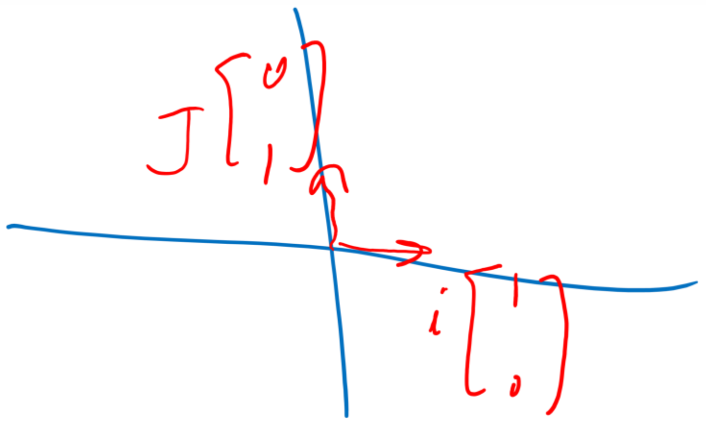
بردارهای واحد محورهای مختصات

بردارهای واحد محورهای مختصات، بردارهایی هستند که می‌توان به کمک آن‌ها مختصات هر بردار دلخواه را به صورت جبری نشان داد. فرض کنید مختصات بردار a به شکل $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ باشد. می‌توان نوشت:

$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\y\end{bmatrix}=x\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

به $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ بردار واحد محور طول می‌گوییم و آن را با $\vec{i}$ نمایش می‌دهیم و به $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ بردار واحد محور عرض می‌گوییم و آن را با $\vec{j}$ نمایش می‌دهیم. نام دیگر بردار واحد محورهای مختصات، بردار یکه است.

$$\vec{a}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=x\vec{i}+y\vec{j}$$



$$\vec{b}=\begin{bmatrix}3\\5\end{bmatrix}=3\vec{i}+5\vec{j}$$

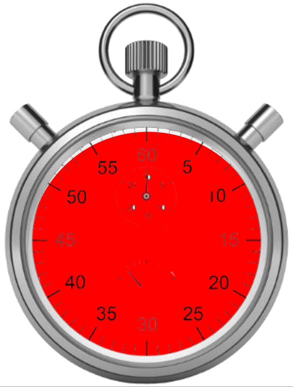
مرتضی طاهری

تست: اگر $a=-۳\vec{i}$ ، $b=\vec{j}$ و $c=\vec{a}-۲\vec{b}$ باشد، مختصات c در کدام گزینه آمده است؟

۱) $\begin{bmatrix} ۳ \\ ۲ \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} -۳ \\ ۲ \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} -۳ \\ -۲ \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} ۳ \\ -۲ \end{bmatrix}$

$\vec{a}=\begin{bmatrix} -۳ \\ ۰ \end{bmatrix}$ $\vec{b}=\begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \end{bmatrix} \longrightarrow ۲\vec{b}=\begin{bmatrix} ۰ \\ ۲ \end{bmatrix}$

$c=\begin{bmatrix} -۳ \\ -۲ \end{bmatrix}$



مرتضی طاهری

معادلهٔ مختصاتی

به معادلاتی که در آن مجهول یک بردار است یا مجهول‌ها یکی از مؤلفه‌های مختصات هستند، معادلهٔ مختصاتی می‌گویند.

برای حل این معادلات مانند معادلات معمولی ابتدا طرفین تساوی را تا جایی که امکان دارد ساده می‌کنیم و سپس معلوم در یک طرف تساوی و مجهول را در طرف دیگر تساوی قرار می‌دهیم و در نهایت مؤلفه‌های بردار معلوم را بر ضریب بردار مجهول تقسیم می‌کنیم.

مرتضی طاهری

تست: مختصات بردار $\vec{x}$ در معادلهٔ مقابل کدام است؟

$$۴\vec{x} - ۳\begin{bmatrix}-۲\\-۱\end{bmatrix} = ۲\begin{bmatrix}-۲\\-۵\end{bmatrix}$$

۱) $\begin{bmatrix}-\frac{۵}{۴}\\-\frac{۱۳}{۴}\end{bmatrix}$

۲) $\begin{bmatrix}-۵\\-۱۳\end{bmatrix}$

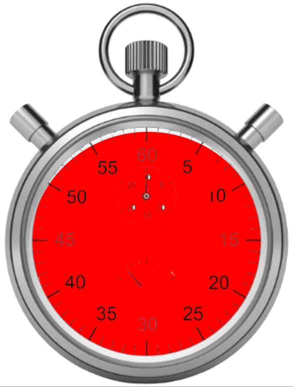
۳) $\begin{bmatrix}-\frac{۵}{۲}\\-\frac{۱۳}{۴}\end{bmatrix}$

۴) $\begin{bmatrix}-\frac{۵}{۴}\\-\frac{۱۳}{۲}\end{bmatrix}$

$$4\vec{x} = \begin{bmatrix}-4\\-10\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-6\\-3\end{bmatrix}$$

$$4\vec{x} = \begin{bmatrix}-10\\-13\end{bmatrix} \Rightarrow \vec{x} = \begin{bmatrix}-\cancel{\frac{10}{4}}\\-\frac{13}{4}\end{bmatrix}$$

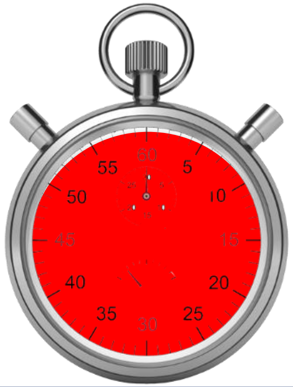
$-\frac{5}{2}$



مرتضی طاهری

تست: در تساوی $a(3\vec{i}+\vec{j})-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}6\\-4b\end{bmatrix}=6\vec{j}$ ، $a+b$ برابر با چه عددی است؟

۱) $\frac{5}{2}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{7}{2}$



مرتضی طاهری