

## حل معادله درجه دو با تجزیه:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

یک ضرب اگر صفر بشه، یکی از عامل هاش صفره.

$$ax^2 + bx + c = 0 \leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \leftrightarrow (x+r)(x+s) = 0$$

اگر بتونیم دو عدد  $r, s$  پیدا کنیم که

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = (x+r)(x+s)$$

اون موقع  $-r, -s$  ریشه‌های معادله درجه دو  $ax^2 + bx + c = 0$  هستند.

$$ax^2 + bx + c = 0 \leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \leftrightarrow (x+r)(x+s) = 0 \leftrightarrow x = -r \text{ or } x = -s$$

چجوری دو عدد  $r, s$  پیدا کنیم که  $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = (x+r)(x+s)$ ؟

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = (x+r)(x+s) = x^2 + (r+s)x + rs$$

باید  $r+s = \frac{b}{a}$  باشه و  $rs = \frac{c}{a}$ .

**مثال:** معادله  $x^2 + 5x + 6 = 0$  را حل کنیم. آیا می‌تونیم تجزیه‌ش کنیم؟ آیا می‌تونیم دو عدد که جمعشون ۵ و ضربشون ۶ باشه پیدا کنیم؟ بله. ۳ و ۲. پس ریشه‌های معادله  $-2, -3$  هستند.

$$x^2 + 5x + 6 = 0 \leftrightarrow x^2 + 5x + 6 = (x+2)(x+3) = 0 \leftrightarrow x+2 = 0 \text{ or } x+3 = 0 \\ \leftrightarrow x = -2 \text{ or } x = -3$$

**مثال:** معادله  $x^2 + 5x + 6 = 0$  را با فرمول درجه دو حل کنیم:

راه‌حل: در این‌جا:  $\Delta = (5)^2 - 4(1)(6) = 1$ . پس ریشه‌ها

$$\alpha, \beta = \frac{-5 \pm \sqrt{1}}{2 \times 1} = \frac{-5 \pm 1}{2} = -2, -3$$

که همان جواب‌های قبلی هستند.

## جمع و ضرب ریشه‌های معادله درجه دو:

تمرین ۲: (قضیه) نشان دهید جمع دو جواب معادله درجه (ریشه معادله درجه دو)، برابر با  $-\frac{b}{a}$  و حاصل ضرب دو جواب برابر با  $\frac{c}{a}$  است. (راهنمایی: فرمول ریشه‌های معادله درجه دو)

راه‌حل: معادله درجه دو  $ax^2 + bx + c = 0$ . دو تا جواب:

$$\alpha = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad \beta = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

اولا جمع دو ریشه:

$$\alpha + \beta = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(-b + \sqrt{\Delta}) + (-b - \sqrt{\Delta})}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

حالا ضرب:

$$\alpha \cdot \beta = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \times \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(-b + \sqrt{\Delta})(-b - \sqrt{\Delta})}{4a^2} = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

الان که تجزیه هم صحبت کردیم:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = (x + r)(x + s)$$

که  $r + s = \frac{b}{a}$ ,  $rs = \frac{c}{a}$  ریشه‌های معادله  $-r, -s$  بودند. پس جمع ریشه‌ها

$$(-r) + (-s) = -(r + s) = -\frac{b}{a}$$

و ضرب ریشه‌ها

$$(-r)(-s) = rs = \frac{c}{a}$$

و اثبات با تجزیه هم انجام می‌شود.

برعکس کار بالا: معادله درجه دویی بنویسیم که 5,6 ریشه‌هایش باشند.

جواب:  $0 = (x - 5)(x - 6)$  یا معادلا:  $x^2 - 11x + 30 = 0$ . ریشه‌هایش اون‌ها هستند.

سؤال: معادله زیر را حل کنید ( $m, n, p$  اعداد ناصفر هستند)

$$x^2 + \left(\frac{mn}{p} - \frac{p}{mn}\right)x - 1 = 0$$

راه حل: می‌خواهیم با تجزیه حل کنیم مثلاً. چون ضریب پیشرو یک است، اگر  $\alpha, \beta$  ریشه‌ها باشند جمعشون  $-\frac{b}{a}$  و ضربشون  $\frac{c}{a}$ . پس باید دو تا عدد پیدا کنیم که جمعشون  $\frac{p}{mn} - \frac{mn}{p}$  باشه و ضربشون  $-1$ . این دو عدد  $-\frac{mn}{p}, \frac{p}{mn}$  هستند.  $\odot$  تمام.

تعریف (نامگذاری): ضریب پیشرو یعنی ضریب بزرگ‌ترین توان  $x$ . یعنی مثلاً اگر درجه دو هست، ضریب  $x^2$  یعنی  $ax^2 + bx + c = 0$ ، ضریب پیشرو  $a = 1$ .

سؤال جالب: فرض کنید که  $\alpha, \beta$  ریشه‌های معادله  $x^2 - 10x + 5 = 0$  باشند. می‌خواهیم یک معادله درجه دو بنویسیم که ریشه‌هایش  $\alpha^3 + 1, \beta^3 + 1$  باشند.

جواب:  $x^2 - 852x + 976 = 0$ .  $\odot$

راه حل: یک راه این است که خود  $\alpha, \beta$  را به دست بیاوریم. بعد به توان سه برسونیم و بعلاوه یک و ...

یک راه بدون به دست آوردن  $\alpha, \beta$ .

اولاً طبق فرض  $\alpha\beta = 5, \alpha + \beta = 10$  (طبق قضیه جمع و ضرب ریشه‌های درجه دو)

یک معادله می‌خواهیم که ریشه‌هایش  $m = \alpha^3 + 1$  و  $n = \beta^3 + 1$  باشند. این معادله:

$$x^2 - (m+n)x + mn = 0 \text{ هست. حالا سؤال } m+n=?, mn=?$$

$$m+n = (\alpha^3 + 1) + (\beta^3 + 1) = 2 + (\alpha^3 + \beta^3) = 2 + (\alpha + \beta)(\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta) =$$

برای محاسبه  $\alpha^2 + \beta^2$ :

$$(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = \alpha^2 + \beta^2 \rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = 10^2 - 2 \times 5 = 90$$

$$\rightarrow m+n = 2 + (\alpha + \beta)(\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta) = 2 + 10 \times (90 - 5) = 852$$

و

$$mn = (\alpha^3 + 1)(\beta^3 + 1) = \alpha^3\beta^3 + \alpha^3 + \beta^3 + 1 = (\alpha\beta)^3 + 850 + 1 = 5^3 + 850 + 1 = 125 + 850 + 1 = 976$$

و بنابراین معادله آماده است:  $x^2 - 852x + 976 = 0$