ریشه‌گیری

از قبل با مفهوم جذر آشنا شده‌اید. حالا می‌خواهیم کمی بحث را گسترش دهیم و تعریف ریشهٔ دوم را بیاوریم.

> ریشه‌های دوم عدد a، اعدادی هستند که اگر به توان ۲ برسند، مساوی a شوند.

مثلاً ریشه‌های دوم ۹ می‌شوند: ۳+ و ۳−، چون اگر این دو عدد به توان ۲ برسند، جواب ۹ می‌شود. منظور از جذر یک عدد مثبت، ریشهٔ دوم مثبت است؛ پس جذر ۹ فقط می‌شود: ۳.

$\sqrt{۹} = ۳$

مرتضی طاهری

تذکر:

① هر عدد مثبت a دو ریشهٔ دوم دارد. ریشهٔ دوم مثبت را با $\sqrt{a}$ و ریشهٔ دوم منفی را با $-\sqrt{a}$ نشان می‌دهیم. در مثال قبل $\sqrt{۹}=۳$ و $-۳=-\sqrt{۹}$.

② عدد صفر فقط یک ریشهٔ دوم دارد و آن هم خودش است: $\sqrt{۰}=-\sqrt{۰}=۰$

③ اعداد منفی ریشهٔ دوم ندارند؛ چون هیچ عدد حقیقی وجود ندارد که به توان ۲ برسد و جواب، عددی منفی شود؛ به طور مثال: هیچ عددی به توان ۲ نمی‌شود ۴-.

مرتضی طاهری

تست: کدام‌یک از گزینه‌های زیر درست است؟

۱) $\sqrt{۱۶} = \cancel{\pm}۴$

۲) $\sqrt{-(-۲)^۴} = -۴$

۳) $\sqrt{\frac{۱}{۲۵}} < \sqrt{\frac{۱}{۳۶}}$

۴) مجموع ریشه‌های دوم هر عددی می‌شود صفر. (در صورت وجود)

$\frac{1}{۵} < \frac{1}{۶}$

$\sqrt{n} - \sqrt{n} = 0$

مرتضی طاهری

ریشه‌های nاُم $(n \in \mathbb{N})$ عدد a، اعدادی هستند که اگر به توان n برسند، مساوی a شوند.

خیلی راحت با مثال‌زدن و کمی فکرکردن خودتان می‌توانید به درستی جملات زیر پی ببرید:

ریشه سوم عدد ۸ = ۲

ریشه چهارم عدد ۱۶ = $\pm$۲

نکته:

الف) در مورد ریشه‌های زوج می‌توان گفت:

① اعداد مثبت دوتا ریشهٔ زوج دارند؛ مثلاً ۶۲۵ دوتا ریشهٔ چهارم دارد که آن‌ها را به صورت $\sqrt[4]{625}=5$ و $-\sqrt[4]{625}=-5$ نشان می‌دهیم.

② همهٔ ریشه‌های عدد صفر، خودش است؛ یعنی: $\sqrt[n]{0}=0$.

③ اعداد منفی ریشهٔ زوج ندارند.

ب) در مورد ریشه‌های فرد می‌گوییم:

همهٔ اعداد حقیقی، دقیقاً یک ریشهٔ فرد دارند. مثال‌های زیر را ببینید:

$2^5=32 \Leftrightarrow \sqrt[5]{32}=2 \quad , \quad (-2)^5=-32 \Leftrightarrow \sqrt[5]{-32}=-2$

$(-3)^3=-27 \Leftrightarrow \sqrt[3]{-27}=-3 \quad , \quad 0^{11}=0 \Leftrightarrow \sqrt[11]{0}=0$

مرتضی طاهری

۱) $\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$

۲) $\sqrt[n]{a}\div\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

۳) $\sqrt[n]{a^n}=\begin{cases}|a| & \text{اگر } n \text{ زوج باشد.}\\ a & \text{اگر } n \text{ فرد باشد.}\end{cases}$

این مورد در واقع حالت کلی‌تر $\sqrt{x^2}=|x|$ است.

۴) $(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}=\begin{cases}|a|^{\frac{m}{n}} & \text{اگر } m \text{ زوج باشد.}\\ a^{\frac{m}{n}} & \text{اگر } m \text{ فرد باشد.}\end{cases}$

چون در امسال تعریف و مفهوم توان‌های گویا را یاد نمی‌گیرید، تساوی آبی‌رنگ وقتی درست است که m بر n بخش‌پذیر باشد.

۵) $\sqrt[n]{a\pm b}\neq\sqrt[n]{a}\pm\sqrt[n]{b}$

مرتضی طاهری

تست: حاصل عبارت $۷\sqrt{۷} \times \frac{\sqrt{۱۲۵}\times\sqrt{۴۰}}{\sqrt{۳۵\times ۲۷}} \times \frac{\sqrt{۱۵۰}}{\sqrt{۲۴۵}}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۰۰}{۳}$ ۲) $\frac{۱۰۰}{۲۱}$ ۳) $\frac{۱۰۰\sqrt{۷}}{۳}$ ۴) $\frac{۱۰۰\sqrt{۷}}{۲۱}$

$۲۴۵ = ۵ \times ۴۹$

۴×۱۰

$۷ \times ۵ \quad ۹ \times ۳$

$\sqrt{۲} \times \sqrt{۳}$

$$\frac{۵\sqrt{۶}}{۷\sqrt{۵}} \times \frac{۵\sqrt{۵} \times ۲\sqrt{۵} \times \sqrt{۲}}{۳ \times \sqrt{۷} \times \sqrt{۵} \times \sqrt{۳}} \times ۷\sqrt{۷} = \frac{۱۰۰}{۳}$$

مرتضی طاهری

تست: حاصل عبارت $\sqrt[3]{(-\frac{1}{\cancel{8}})^4} \times \sqrt[5]{(-\frac{1}{\cancel{32}})^3}$ در کدام گزینه آمده است؟

2^3 2^5

۱) $-\frac{1}{2^{-7}}$

۲) $\frac{1}{2^{-7}}$

۳) 2^{-7}

۴) -2^{-7}

$$\sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\right)^{12}} \times \sqrt[5]{-\left(\frac{1}{2}\right)^{15}}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{4} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{3} = -\left(\frac{1}{2}\right)^{7}$$

مرتضی طاهری

جمع و تفریق رادیکال‌ها

در جمع و تفریق‌هایی که مقدار زیر رادیکال مساوی است، کار ساده‌ای داریم. به طور مثال: $۵\sqrt{۱۰}-۲\sqrt{۱۰}+\sqrt{۱۰}=(۵-۲+۱)\sqrt{۱۰}=۴\sqrt{۱۰}$.

ولی همیشه این‌طور نیست؛ مثلاً $\sqrt{۲}-۲\sqrt{۸}$.

در این موارد سعی می‌کنیم مانند تست‌های قبلی حل‌شده، زیر رادیکال را خلوت کنیم تا مقدارشان با هم مساوی شود؛ یعنی این‌طوری:

$$\sqrt{۲}-۲\sqrt{۸}=\sqrt{۲}-۲\sqrt{۴\times۲}=\sqrt{۲}-۲\times\sqrt{۴}\sqrt{۲}=\sqrt{۲}-۴\sqrt{۲}=-۳\sqrt{۲}$$

تست: حاصل $5\sqrt[3]{2}+3\sqrt[3]{54}-4\sqrt[3]{128}$ چند است؟ (کتاب درسی)

۱) $-\sqrt[3]{2}$
۲) $-6\sqrt[3]{2}$
۳) $-2\sqrt[3]{2}$
۴) $-4\sqrt[3]{2}$

$$5\sqrt[3]{2}+3\sqrt[3]{\underset{3^3}{\cancel{27}}\times 2}-4\sqrt[3]{\underset{4^3}{\cancel{64}}\times 2}$$

$$5\sqrt[3]{2}+\underbrace{(3\times 3)}_{9}\sqrt[3]{2}-16\sqrt[3]{2}=-2\sqrt[3]{2}$$

مرتضی طاهری

گویاکردن مخرج کسرها

به گویاکردن مخرج کسرها به طور خلاصه، اصطلاحاً «گویاکردن کسر» هم گفته می‌شود؛ مثلاً با ضرب‌کردن $\sqrt{2}$ در صورت و مخرج $\frac{1}{\sqrt{2}}$ و $\frac{1}{\sqrt{18}}$، می‌شود آن‌ها را به صورت $\frac{\sqrt{2}}{2}$ و $\frac{\sqrt{2}}{6}$ نوشت.

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{18}} \times \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{18}} = \frac{\sqrt{18}}{18}$$

$$\frac{1}{\sqrt{18}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3 \times 2}$$

مرتضی طاهری

۱- **یک‌جمله‌ای:** به هر عبارتی که به صورت حاصل‌ضرب یک «عدد حقیقی» در توان‌های صحیح و نامنفیِ یک یا چند متغیر باشد، یک‌جمله‌ای می‌گوییم؛ مثل: $-۲x$ ، ۷ ، $۵y^۲$ ، $-\frac{۳}{۲}xy^۲$ ، $\sqrt{۷}x^۳yz^۲$ و $\frac{\pi}{\sqrt{۲}}xz^۳$ ولی $\sqrt{x}$ ، $\sqrt{y^۳}$ ، $|x|$ ، ۵^x و $\frac{۱}{x-۱}$ یک‌جمله‌ای نیستند.

۲- **ضریب:** در یک‌جمله‌ای مانند $۹x^۲$ به عدد ۹ ضریب می‌گوییم.

۳- **درجهٔ یک‌جمله‌ای:** به یک‌جمله‌ای $۵x^۲y^۳z^۱$ دقت کنید. به توان هر متغیر می‌گوییم درجهٔ آن متغیر. مثلاً درجهٔ این عبارت نسبت به x می‌شود ۲. حالا اگر درجهٔ آن را نسبت به x و z خواستند، می‌شود $۲+۱=۳$. درجهٔ آن نسبت به کل متغیرها هم می‌شود $۲+۳+۱=۶$.

معمولاً ضریب‌ها را با حروف اول زبان انگلیسی مانند a، b، c و متغیرها را با حروف پایانی این زبان نشان می‌دهند.

۴- جملات متشابه: به یک‌جمله‌ای‌هایی که قسمت‌های حرفی آن‌ها (متغیرهای آن‌ها) دقیقاً مثل هم است، متشابه می‌گوییم؛ مثل: $۶x^۲y$ و $-۵x^۲y$.

۵- چندجمله‌ای: به حاصل جمع یا تفریق چندتا یک‌جمله‌ای غیرمتشابه (حداقل ۲ تا) می‌گوییم چندجمله‌ای؛ مثل: $x+۱$، $x^۲-۴x+۱$، $x^۲y-yx^۲$ و ... .

۶- درجهٔ چندجمله‌ای: در هر چندجمله‌ای، به بزرگ‌ترین درجهٔ یک متغیر، درجه نسبت به آن متغیر می‌گوییم؛ مثلاً درجهٔ $۱۲xy^۴-۴x^۲y^۲-x^۳y^۳+۶$ نسبت به x برابر ۳ و نسبت به y برابر ۴ است. حالا اگر درجهٔ این چندجمله‌ای را نسبت به x و y خواستند، باید ببینیم کدام یک‌جمله‌ای درجه‌اش نسبت به این دو متغیر از همه بیشتر است، پس جواب از $x^۳y^۳$ به دست می‌آید: $۳+۳=۶$

۷- شکل استاندارد: اگر چندجمله‌ای‌ها را برحسب توان‌های نزولی یک متغیر (از بزرگ به کوچک) مرتب کنیم، می‌گوییم این چندجمله‌ای به صورت استاندارد نوشته شده است؛ مثل: $x^۴-۳x^۳+۲x-۱$.

اعمال جبری چند جمله‌ای‌ها

در سال‌های هفتم و هشتم، جمع، تفریق، ضرب و تقسیم یک‌جمله‌ای‌ها را یاد گرفتید. در این‌جا برای مرور مطالب، مثال زیر را ببینید. دقت کنید که فقط جملات متشابه با هم جمع و تفریق می‌شوند.

مثال: حاصل عبارت‌های زیر را به ساده‌ترین صورت می‌نویسیم:

۱) $(۵x^۲+۲x+۳)-(۳x^۲-۴x-۵)+(۳x-۶-۷x^۲)$

$=(۵x^۲-۳x^۲-۷x^۲)+(۲x-(-۴x)+۳x)+(۳-(-۵)-۶)=-۵x^۲+۹x+۲$

۲) $(-\frac{۵}{۱۲}ab^۲xy)(\frac{۱۸}{۵}a^۲b^۳xy^۴z)=-\frac{۵}{۱۲}\times\frac{۱۸}{۵}(a^{۱+۲})(b^{۲+۳})(x^{۱+۱})(y^{۱+۴})(z^{۰+۱})=-\frac{۳}{۲}a^۳b^۵x^۲y^۵z$

۳) $\frac{۳۰x^۴y^۲z^۳}{-۵x^۲yz^۲}=\frac{۳۰}{-۵}\times(x^{۴-۲})(y^{۲-۱})(z^{۳-۲})=-۶x^۲yz$

ضرب چندجمله‌ای در یک‌جمله‌ای: برای این کار باید یک‌جمله‌ای را در تمام جملات چندجمله‌ای ضرب کرد:

$$\frac{3}{4}x^2 \times (8x-6) = \frac{3}{4}x^2 \times 8x - \frac{3}{4}x^2 \times 6 = 6x^3 - \frac{9}{2}x^2$$

تقسیم چندجمله‌ای بر یک‌جمله‌ای: مانند ضربشان باید تمام جملات چندجمله‌ای را بر یک‌جمله‌ای تقسیم کرد:

$$\frac{-18x^2y^2a + 70xya^2}{10xya} = \frac{-18x^2y^2a}{10xya} + \frac{70xya^2}{10xya} = -1/8xy + 7a$$

تست: حاصل تقسیم $x^{۳} + ۱۴ - (۲ + x\frac{۷}{۶})x۶ - (۲ + x۳ - x^{۲})۷$ بر x کدام است؟

۱) $x^{۲} - ۳۳$

۲) $\frac{۷}{۶}x^{۲} - ۲۷$

۳) $x^{۲} - ۲۷$

۴) $\frac{۷}{۶}x^{۲} - ۳۳$

مرتضی طاهری

ضرب چند جمله‌ای در چند جمله‌ای

برای ضرب‌کردن دوتا چندجمله‌ای، باید تمام جملات چندجمله‌ای اول را در تمام جملات چندجمله‌ای دوم ضرب کرد. بعد از ضرب‌کردن، باید جملات متشابه را با هم ساده کنیم:

$$(x^2-2)(x^4+x^2+1)=x^2\times(x^4+x^2+1)-2\times(x^4+x^2+1)=x^6+x^4+x^2-2x^4-2x^2-2$$

$$=x^6+(x^4-2x^4)+(x^2-2x^2)-2=x^6-x^4-x^2-2$$

مرتضی طاهری

تست: در حاصل‌ضرب $(x^6 - 2x^4 + x^2 - 1)(3x^3 - 5x^2 + 6x - 2)$ بعد از ضرب و ساده‌کردن جملات متشابه، ضریب x^5 چند است؟

۱) -12 ۲) 9 ۳) -9 ۴) -3

$-12x^5 + 3x^5 = -9x^5$

مرتضی طاهری

مفهوم اتحاد

تساوی‌هایی که در آن‌ها متغیر وجود دارد، همه مدلی هستند. بعضی‌هاشان فقط به ازای یک عدد جواب دارند؛ مثل:

$۲x+۵=۱۵ \Rightarrow$ x فقط می‌تواند ۵ باشد.

بعضی هم دو یا سه جواب (یا حتی بیشتر) دارند؛

$x^۲=۱۶ \Rightarrow$ x می‌تواند ۴ یا ۴− باشد.

$x^۳=x \Rightarrow$ x می‌تواند ۱+ یا ۰ یا ۱− باشد.

به این تساوی‌ها می‌گوییم **معادله**.

ولی بعضی تساوی‌های دیگر هستند که اگر به جای x هر عددی بگذاریم، دو طرف تساوی یک مقدار را می‌دهند؛ مثل: $x+x=۲x$ یا $x-x=۰$ یا $x(x+۱)=x^۲+x$ و یا $(x+۱)(x+۱)=x^۲+۲x+۱$ به تساوی‌های این مدلی **اتحاد** می‌گوییم.

تست: با توجه به اتحاد $Ax(x+1) = 2x^2 + Bx + C$ ، مقدار $A - B + C$ کدام است؟

۱) ۴
۲) ۲
۳) ۴-
۴) صفر

$Ax^2 + Ax = 2x^2 + Bx + C$

$A = 2$

$B = A = 2$

$C = 0$

مرتضی طاهری

تست: در اتحاد $\frac{2x^2+3}{x^4+3x^2+2}=\frac{A}{x^2+1}+\frac{B}{x^2+2}$ ، حاصل $A+B$ چند است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

$$\frac{Ax^2+2A+Bx^2+B}{x^4+3x^2+2}=\frac{2x^2+3}{x^4+3x^2+2}$$

$$(A+B)x^2+(2A+B)$$

مرتضی طاهری