سؤال ۱: معادله $x^2+2x+5+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}=0$ را حل کنید.

راه‌حل:

ایده اصلی: تغییر متغیر. قرار دهید $y=x+\frac{1}{x}$. سؤالی که مطرح میشه: آیا معادله رو برحسب فقط y میشه نوشت؟

$$x^2+2x+5+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}=0 \leftrightarrow \left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+2\left(x+\frac{1}{x}\right)+5=0$$

می‌مونه $x^2+\frac{1}{x^2}$ رو به y ربط بدیم. که y^2:

$$y^2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+\frac{1}{x^2}+2.x.\frac{1}{x}=x^2+\frac{1}{x^2}+2$$

پس معادله برحسب y:

$$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+2\left(x+\frac{1}{x}\right)+5=0 \to (y^2-2)+2y+5=0 \to y^2+2y+3=0 \to \Delta = 2^2-4\times 1\times 3=-8$$

پس معادله جواب برای y ندارد. بنابراین برای x هم جواب ندارد.

سؤال ۲: معادله $x^2+2x-6+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}=0$ را حل کنید.

راه‌حل: (مشابه قبلی) قرار دهید $y=x+\frac{1}{x}$. پس معادله به شکل $y^2-2+2y-6=0$ در میآید. که $y^2+2y-8=0$. پس $\Delta=2^2-4\times 1\times(-8)=36$. پس

$$y=\frac{-2\pm\sqrt{36}}{2}=\frac{-2\pm 6}{2}=-4\,,2$$

پس جواب‌های y به‌دست آمد. حالا باید x را به‌دست آوریم. پس در دو حالت بررسی می‌کنیم:

حالت اول: $y=2$. پس

$$x+\frac{1}{x}=2 \to x^2+1=2x \to x^2-2x+1=0 \to (x-1)^2=0 \to x=1$$

حالت دوم: $y=-4$.

$$x+\frac{1}{x}=-4 \to x^2+1=-4x \to x^2+4x+1=0 \to \Delta=4^2-4\times 1\times 1=12$$

پس $x=\frac{-4\pm\sqrt{12}}{2}=\frac{-4\pm 2\sqrt{3}}{2}=-2\pm\sqrt{3}$

پس معادله اصلی سه جواب $x=1, x=-2+\sqrt{3},-2-\sqrt{3}$ دارد.

برگردیم اتحادها رو یکم صحبت کنیم.

اتحاد مربع سه جمله‌ای:

$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$$

اتحاد مربع چهارجمله‌ای

$$(a+b+c+d)^2 = a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd$$

اتحاد مربع nجمله‌ای:

$$(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2 = a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2+2\left(\text{مجموع همه ضربهای دوتایی}\right)$$

اتحاد لاگرانژ:

$$(a^2+b^2)(x^2+y^2) = (ax+by)^2+(ay-bx)^2$$

اثبات:

$$\begin{aligned}(a^2+b^2)(x^2+y^2) &= a^2x^2+a^2y^2+b^2x^2+b^2y^2\\ (ax+by)^2+(ay-bx)^2 &= a^2x^2+b^2y^2+2axby+a^2y^2+b^2x^2-2aybx\\ &= a^2x^2+a^2y^2+b^2x^2+b^2y^2\end{aligned}$$

و اثبات کامل است.

تذکر: اتحاد لاگرانژ را دو جور میشه نوشت:

$$\begin{aligned}(a^2+b^2)(x^2+y^2) &= (ax+by)^2+(ay-bx)^2\\ (a^2+b^2)(x^2+y^2) &= (ax-by)^2+(ay+bx)^2\end{aligned}$$

تمرین: عدد ۳۱۳۶۵ را به‌صورت جمع دو مربع بنویسید. سؤال: به چند حالت میشه؟

اتحاد اویلر

برای جاهای که جمع سه‌تا توان سه داشته‌باشیم.

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(\quad)$$

پرانتز روم را پیدا کنیم:

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(\quad)$$

در پرانتز باید a^2, b^2, c^2 می‌خواهیم برای ساختن a^3, b^3, c^3. بیایی‌م ضرب کنیم:

$$(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2) = a^3 + b^3 + c^3 + (ab^2 + ac^2 + ba^2 + bc^2 + ca^2 + cb^2)$$

این جمله اضافی رو می‌خواهیم حذف کنیم.

$$ab^2 = a \times b^2 = b \times ab$$

پس با استفاده از $-ab$ توی پرانتز دوم، ab^2 را حذف می‌کنیم. مشابه $-bc, -ca$ را هم احتمالا می‌خواهیم.

پس پرانتز دومی شد $a^2 + b^2 + c^2 - (ab + bc + ca)$. بیایی‌م ضرب کنیم:

$$\begin{aligned}
&(a + b + c)\big(a^2 + b^2 + c^2 - (ab + bc + ca)\big) \\
&\qquad = a^3 + b^3 + c^3 + (ab^2 + ac^2 + ba^2 + bc^2 + ca^2 + cb^2) \\
&\qquad - \big((a + b + c)(ab + bc + ca)\big) \\
&= a^3 + b^3 + c^3 + (ab^2 + ac^2 + ba^2 + bc^2 + ca^2 + cb^2) \\
&\qquad - \big((ab^2 + ac^2 + ba^2 + bc^2 + ca^2 + cb^2) + 3abc\big)
\end{aligned}$$

و بنابراین

$$(a + b + c)\big(a^2 + b^2 + c^2 - (ab + bc + ca)\big) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$$

و این صورت اتحاد اویلر است.