سؤال ۱: عدد طبیعی k داده شده است. (برحسب k) همه اعداد حقیقی x را بیابید که داشته‌باشیم

$$x^2+(x+1)^2+\cdots+(x+k)^2=\left(x+(k+1)\right)^2+\left(x+(k+2)\right)^2+\cdots+(x+2k)^2$$

راه‌حل: فرم استاندارد درجه دو بنویسیم: $ax^2+bx+c=0$. پس به‌توان دو برسونیم و ببریم یک طرف و ساده و مرتب کنیم.

$$\begin{aligned}&x^2+(x+1)^2+\cdots+(x+k)^2=\left(x+(k+1)\right)^2+\left(x+(k+2)\right)^2+\cdots+(x+2k)^2\rightarrow\\&x^2+(x^2+2x+1)+(x^2+4x+4)+\cdots+(x^2+2kx+k^2)\\&\qquad=(x^2+2(k+1)x+(k+1)^2)+\cdots+(x^2+4kx+4k^2)\end{aligned}$$

همه را ببریم یک طرف و مرتب کنیم... سمت چپ چندتا x^2 داره و سمت راست چندتا؟ سمت چپ $k+1$ تا x^2 داره و سمت راست kتا (چرا؟). پس وقتی بیاریم همه را سمت چپ، یدونه x^2 میمونه. و بقیه هم که منها میشن.

$$\begin{aligned}&x^2+\left(2(1+2+3+\cdots+k)-2\left((k+1)+(k+2)+\cdots+(2k)\right)\right)x\\&\qquad+\left((1^2+2^2+\cdots+k^2)-((k+1)^2+(k+2)^2+\cdots(2k)^2)\right)=0\end{aligned}$$

مرتب (استاندارد) شد. ضرایب ساده کنیم.

$$\begin{aligned}&x^2+2\left((1+2+3+\cdots+k)-\left((k+1)+(k+2)+\cdots+(2k)\right)\right)x\\&\qquad+\left((1^2+2^2+\cdots+k^2)-((k+1)^2+(k+2)^2+\cdots(2k)^2)\right)=0\\&\rightarrow x^2-2k^2x+\left((1^2+2^2+\cdots+k^2)-((k+1)^2+(k+2)^2+\cdots(2k)^2)\right)=0\end{aligned}$$

توجه کنید:

$$\begin{aligned}&(1+2+3+\cdots+k)-\left((k+1)+(k+2)+\cdots+(2k)\right)=\\&\left(1-(k+1)\right)+\left(2-(k+2)\right)+\cdots+(k-2k)=(-k)+(-k)+\cdots+(-k)=-k^2\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}&(1^2+2^2+\cdots+k^2)-((k+1)^2+(k+2)^2+\cdots(2k)^2)=\\&(1^2-(k+1)^2)+(2^2-(k+2)^2)+(3^2-(k+3)^2)+\cdots+(k^2-(2k)^2)=\\&\left((1-(k+1))(1+(k+1))\right)+\left((2-(k+2))(2+(k+2))\right)\\&\qquad+\left((3-(k+3))(3+(k+3))\right)+\cdots+\left((k-2k)(k+2k)\right)=\\&\left((-k)(1+(k+1))\right)+\left((-k)(2+(k+2))\right)+\cdots+\left((-k)(k+2k)\right)=\\&(-k)\left(1+2+3+\cdots+k+(k+1)+(k+2)+(k+3)+\cdots+(2k)\right)\\&\qquad=(-k)\times\frac{2k\times(2k+1)}{2}=-k^2(2k+1)\end{aligned}$$

و بالاخره ضرایب معادله ساده شد ☺☺☺

$$x^2-2k^2x-k^2(2k+1)=0$$

حالا حلش کنیم. مثلا با دلتا:

$$\begin{aligned}\Delta = b^2 - 4ac = (-2k^2)^2 - 4 \times 1 \times \left(-k^2(2k+1)\right) = 4k^4 + 8k^3 + 4k^2 \\ = 4k^2(k^2 + 2k + 1) = 4k^2(k+1)^2\end{aligned}$$

بریم برای ریشه‌ها:

$$\begin{aligned}\alpha, \beta = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2k^2 \pm \sqrt{4k^2(k+1)^2}}{2} = \frac{2k^2 \pm \sqrt{(2k)^2(k+1)^2}}{2} = \frac{2k^2 \pm (2k)(k+1)}{2} \\ = k^2 \pm k(k+1) = \begin{cases} k^2 + k(k+1) = k^2 + k^2 + k = 2k^2 + k \\ k^2 - k(k+1) = k^2 - k^2 - k = -k \end{cases}\end{aligned}$$

و جواب‌های معادله $x = -k$ و $x = 2k^2 + k$ هستند.

سؤال ۲ : اعداد حقیقی a, b, c داده شده اند. نشان دهید معادله زیر دارای ریشه حقیقی است:

$$(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)=0$$

و نیز تعیین کنید که چه وقت این معادله دارای ریشه مضاعف است.

راه‌حل: اول باید به فرم استاندارد $kx^2+mx+n=0$ باید دربیاد.

$$(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)=0 \rightarrow$$
$$(x^2-(a+b)x+ab)+(x^2-(b+c)x+bc)+(x^2-(c+a)x+ca)=0 \rightarrow$$
$$3x^2-2(a+b+c)x+(ab+bc+ca)=0$$

حکم: $\Delta \geq 0$:

$$\Delta=\left(-2(a+b+c)\right)^2-4(3)\left((ab+bc+ca)\right)$$
$$=4(a^2+b^2+c^2)+8(ab+bc+ca)-12(ab+bc+ca)=$$
$$4\left((a^2+b^2+c^2)-(ab+bc+ca)\right)$$

می‌خواهیم نشان دهیم $\Delta \geq 0$.

$$(a^2+b^2+c^2)-(ab+bc+ca) \geq 0$$
$$\leftrightarrow 2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca \geq 0$$

این عبارت، مجموع سه‌تا مربع هستش:

$$a^2+a^2+b^2+b^2+c^2+c^2-2ab-2bc-2ca \geq 0 \leftrightarrow (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geq 0$$

که درست است. چون جمع سه‌تا مربع است و منفی نمی‌تواند بشود. پس $\Delta \geq 0$ و معادله ریشه حقیقی دارد.

قسمت دوم: چه وقت ریشه مضاعف: دلتا مساوی صفر. جمع سه مربع مساوی صفر شود. یعنی

$$a-b=0, b-c=0, c-a=0 \rightarrow a=b=c$$

و تمام.

مثال ۲۱.۱ اگر $a^۲+b^۲+c^۲=ab+ac+bc$، نشان دهید $a=b=c$.

راه‌حل.

$$a^۲+b^۲+c^۲=ab+ac+bc$$
$$۲a^۲+۲b^۲+۲c^۲=۲ab+۲ac+۲bc$$
$$a^۲-۲ab+b^۲+a^۲-۲ac+c^۲+b^۲-۲bc+c^۲=۰$$
$$(a-b)^۲+(a-c)^۲+(b-c)^۲=۰$$
$$a-b=۰,\ b-c=۰,\ a-c=۰$$
$$a=b=c$$