مرتضی طاهری

(۱)
$$\begin{cases} a^m \times a^n = a^{m+n} \\ a^m \div a^n = a^{m-n} \quad ; \ (a \neq ۰) \end{cases}$$

تذکر: اگر در تساوی دوم قانون بالا، n را برابر m قرار دهیم، نتیجه می‌گیریم: $a^۰ = ۱$: $\underbrace{a^m \div a^m}_{۱} = a^{m-m} \Rightarrow ۱ = a^۰$

پس هر عدد (غیرصفر) به توان صفر می‌شود ۱.

(۲)
$$\begin{cases} a^m \times b^m = (ab)^m \\ a^m \div b^m = (\frac{a}{b})^m \quad ; \ (b \neq ۰) \end{cases}$$

③ $(a^m)^n = a^{mn}$

حواستان باشد که این رابطه (قانون شمارهٔ ۳) با a^{m^n} فرق دارد. مثال زیر را ببینید:

توان ضربی: $(5^2)^3 = 5^{2\times3} = 5^6$ ، توان توانی: $5^{2^3} = 5^{(2^3)} = 5^8$

اگر در رابطهٔ توان توانی، تعداد توان‌ها بیشتر بود، از بالاترین قسمت شروع می‌کنیم: $7^{2^{3^2}} = 7^{2^{(3^2)}} = 7^{2^9} = 7^{(2^9)} = 7^{512}$

$7^{2^{3^2}} = 7^{2^9} = 7^{512}$

مرتضی طاهری

تست: حاصل $A = ۹^{۴۲} \times ۸^{۸۴} \times ۶^{۱۲} \times ۱۶^{۶}$ به صورت عدد توان‌دار کدام است؟ (انرژی اتمی)

۱) $۲۴^{۹۶}$ ۲) $۳۶^{۷۲}$ ۳) $۶۴^{۴۸}$ ۴) $۷۲^{۳۲}$

$۹^{۴۲} \times ۸^{۸۴} \times ۶^{۱۲} \times ۱۶^{۶}$

$(۲^{۳} \times ۳)^{۹۶} = ۲۴^{۹۶}$

$\cancel{(۳^{۲})^{۴۲}} \times \cancel{(۲^{۳})^{۸۴}} \times (۲ \times ۳)^{۱۲} \times (۲^{۴})^{۶} = ۲^{۲۸۸} \times ۳^{۹۶}$

$۳^{۸۴} \times ۲^{۲۵۲} \times ۲^{۱۲} \times ۳^{۱۲} \times ۲^{۲۴}$

مرتضی طاهری

تست: فرض کنید $P = ۲^m$ و $Q = ۳^n$. کدام‌یک از عبارت‌های زیر برابر ۱۲^{mn} است؟ (انرژی اتمی)

۱) $P^۲Q$
۲) P^nQ^n
۳) $P^{۲m}Q^n$
۴) $P^{۲n}Q^m$

$$۱۲^{mn} = (۲^۲ \times ۳)^{mn} = (۲^۲)^{mn} \times ۳^{mn}$$

$$= (۲^m)^{۲n} \times (۳^n)^m$$

$$P^{۲n} \times Q^m$$

مرتضی طاهری

تست: اگر $x^{x^{3x}} = t$ باشد، حاصل $5x^{4x^{3x}}$ برحسب t برابر است با: (علامه طباطبایی)

۱) $4t^5$ ۲) $5t^4$ ۳) $(5t)^4$ ۴) $5t^{12}$

$x^{x^{3x}} = t$

$5x^{4x^{3x}}$

$5x^{4x^{3x}} = 5 \times \left(x^{4x}\right)^{3x}$

$= 5 \times \left(x^4\right)^{x^{3x}}$

$= 5 \times \left(x^{x^{3x}}\right)^4$

t

مرتضی طاهری

جمع و تفریق اعداد توان‌دار

خیلی وقت‌ها در مسئله‌های این فصل با جمع و تفریق اعداد توان‌دار مواجه می‌شویم. در این‌جور مسائل باید از تبدیل جمع به ضرب استفاده کنیم؛ یعنی این‌طوری:

$$\underbrace{5^2+5^2+5^2+5^2+5^2}_{\text{۵ بار}}=5\times5^2=5^3$$

در این کتاب به این کار می‌گوییم: «اصل گلابی‌ها»[1]

$$5\times5^2=5^3$$

مرتضی طاهری

$۲+۴+\cdots+۲۰=۱۰\times۱۱=۱۱۰$

تست: حاصل عبارت $\dfrac{3^2\times3^4\times3^6\times\cdots\times3^{20}}{\underbrace{9^{50}+9^{50}+\cdots+9^{50}}_{3^{10}\text{ بار}}}$ در کدام گزینه آمده است؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۹ ۴) ۲۷

$$\frac{3^{2}\times3^{4}\times\cdots\times3^{20}}{\underbrace{9^{50}+\cdots+9^{50}}_{3^{10}\text{ بار}}}=\frac{3^{110}}{3^{10}\times 9^{50}}=\frac{\cancel{3^{110}}}{\cancel{3^{110}}}=1$$

$9^{50}=(3^2)^{50}$

مرتضی طاهری

تست: حاصل کسر $\frac{2^x+2^{x+1}+2^{x+2}}{2^{x+3}-2^x}$ به ساده‌ترین شکل کدام است؟ (تیزهوشان)

۱) ۲ ۲) 2^{x-2} ۳) 2^{x-3} ۴) ۱

$$\frac{2^x+2^{x+1}+2^{x+2}}{2^{x+3}-2^x} = \frac{\cancel{2^x}(1+2^1+2^2)}{\cancel{2^x}(2^3-1)} = \frac{7}{7} = 1$$

$3 \times 3 = 3^2$ $\qquad$ $3^1 \times 3^2 = 3^3$

تست: اگر $A = 3 + 3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^{10} + 3^{10}$ باشد، حاصل $A - 3^{11}$ برابر است با: (انرژی اتمی)

۱) صفر $\qquad$ ۲) ۱ $\qquad$ ۳) ۳ $\qquad$ ۴) 3^5

$$A = 3 + 3 + 3^2 + 3^2 + \cdots + 3^{10} + 3^{10} + 3 - 3$$

$$A = \underbrace{3 + 3 + 3}_{3^2} + 3^2 + 3^2 + \cdots + 3^{10} + 3^{10} - 3$$

$$A = 3 \times 3^{10} - 3 \Rightarrow A = 3^{11} - 3$$

$$3^{11} - (3^{11} - 3) = 3$$

مرتضی طاهری

تست: حاصل عبارت $\dfrac{۸^۳+۱۲^۳+۲۹\times۴^۳}{۱۰^۴+۷۵^۲}$ در کدام گزینه آمده است؟

۱) $(\frac{۲}{۵})^۶$ ۲) $(\frac{۴}{۵})^۶$ ۳) $(\frac{۲}{۲۵})^۶$ ۴) $(\frac{۸}{۲۵})^۶$

$$\frac{۸^۳+۱۲^۳+۲۹\times۴^۳}{۱۰^۴+۷۵^۲}=\frac{(۲^۳)^۳+(۲^۲\times۳)^۳+۲۹\times(۲^۲)^۳}{(۲\times۵)^۴+(۳\times۵^۲)^۲}=\frac{۲^۶(۱+۲۷+۲۹)}{۵^۴(\underbrace{۱۶+۹}_{۲۵})}$$

$$=\frac{۲^۶\times۲^۶}{۵^۶}=\frac{(۲^۲)^۶}{۵^۶}=(\frac{۴}{۵})^۶$$

مرتضی طاهری

محاسبات شرطی

تساوی $۱۰ = ۳^x$ را ببینید. معلوم است که x عدد طبیعی نیست؛ چون $۹ = ۳^۲$ و $۲۷ = ۳^۳$، به عبارت بهتر x یک عدد غیرصحیح بین ۲ و ۳ است.

حالا بدون این‌که بدانیم x چند است، می‌توانیم حاصل ۹^x را حساب کنیم: $۹^x = (۳^۲)^x = (۳^x)^۲ = (۱۰)^۲ = ۱۰۰$

$$۳^x = ۱۰$$

$$9^x = ?$$

$$9^x = (۳^۲)^x = (۳^x)^۲ = ۱۰^۲ = ۱۰۰$$

مرتضی طاهری

تست: اگر $10 = 2^x$ باشد، حاصل 8^{x+2} کدام گزینه است؟ (نمونه‌دولتی)

۱) ۳۲۰۰۰ ۲) ۶۴۰۰۰ ۳) ۱۶۰۰۰ ۴) ۱۰۰۰۰

$$2^x = 10$$

$$8^{x+2} = (2^3)^{x+2} = (2^{x+2})^3 = (2^x \times 2^2)^3$$

کدک

$$9^{ab} = (9^b)^a = ((3^2)^b)^a = ((3^b)^a)^2 = (2^a)^2$$

تست: اگر $3 = 5^a$ و $2 = 3^b$، حاصل عبارت زیر کدام است؟ (مفید)

$$\left[\frac{9^{ab}}{4^a} + \frac{125^{ab}}{5^{2a}}\right] \times 5^{ab}$$

$$(5^{ab}) = (\cancel{5^a})^b$$

۱) $\frac{17}{9}$ ۲) $\frac{17}{18}$

۳) $\frac{34}{18}$ ۴) $\frac{34}{9}$

$$\left[\frac{\cancel{9^{ab}}}{\cancel{4^a}} + \frac{125^{ab}}{5^{2a}}\right] \times 5^{ab} = \left[1 + \frac{8}{9}\right] \times 2 = \frac{34}{9}$$

$4^a = 2^{2a}$

$$125^{ab} = ((5)^a)^b)^3 = (3^b)^3 = 2^3 = 8$$

مرتضی طاهری

مقایسهٔ اعداد توان‌دار

برای مقایسهٔ اعداد توان‌دار چند حالت وجود دارد:

① **اگر پایه‌ها برابر بودند:** در مورد اعداد بزرگ‌تر از یک، هر چه توان بیشتر باشد، عدد هم بزرگ‌تر است؛ مثلاً $۳^۵ < ۳^۷$.

در مورد اعداد بین صفر و یک، هر چه توان بیشتر باشد، عدد کوچک‌تر خواهد بود؛ مثلاً $(\frac{۱}{۲})^۵ < (\frac{۱}{۲})^۳$.

مرتضی طاهری

تست: اگر $2^a > 4^c$ و $3^b > 9^a$، کدام گزینه درست است؟ (a، b و c مثبت‌اند.)

۱) $c<a<b$ ۲) $b<c<a$ ۳) $c<b<a$ ۴) $a<b<c$

$$2^a > 4^c \Longrightarrow 2^a > 2^{2c} \Longrightarrow a > 2c \quad a > c$$

$$3^b > 9^a \Longrightarrow 3^b > 3^{2a} \Longrightarrow b > 2a \quad b > a$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

تست: اگر $0 < a < 1$، آن‌گاه در مورد اعداد $x = a^1$، $y = a^a$ و $z = a^{a^a}$ کدام گزینه درست است؟

۱) $x < y < z$ ۲) $z < x < y$ ۳) ~~$z < y < x$~~ ۴) $x < z < y$

$$0 < a < 1$$

$$a^1 < a^a , a^{a^a}$$

$$x < y < z$$

برای اعداد بین صفر و یک

هرچه توان کوچکتر

عدد بزرگتر

مرتضی طاهری

۲) **اگر توان‌ها برابر بودند:** در مورد پایه‌های مثبت می‌گوییم عددی که پایهٔ بزرگ‌تری دارد، بزرگ‌تر است؛ به طور مثال: $۹^۶ > ۷^۶$، $(\frac{۱}{۲})^۶ > (\frac{۱}{۳})^۶$، $(۲/۷۱)^۹ > (۲/۷۱)^۵$، $\pi^۴ > ۳^۴$ و ... .

تست: در مورد اعداد $۲^{۵۵۵۵}$، $۳^{۳۳۳۳}$ و $۶^{۲۲۲۲}$ کدام رابطه صحیح است؟ (تیزهوشان)

۱) $۶^{۲۲۲۲} < ۳^{۳۳۳۳} < ۲^{۵۵۵۵}$
۲) $۳^{۳۳۳۳} < ۶^{۲۲۲۲} < ۲^{۵۵۵۵}$
۳) $۲^{۵۵۵۵} < ۶^{۲۲۲۲} < ۳^{۳۳۳۳}$
۴) $۶^{۲۲۲۲} < ۲^{۵۵۵۵} < ۳^{۳۳۳۳}$

مرتضی طاهری

۳) **اگر پایه‌ها و توان‌ها متفاوت بودند:** در این صورت یا مثل: $۱۴^{۱۰}$ و $۱۹^{۱۱}$، هم توان و هم پایهٔ یکی از دیگری بزرگ‌تر است که کار ساده‌ای داریم ($۱۹^{۱۱} > ۱۴^{۱۰}$)، یا یکی پایه‌اش بزرگ‌تر است و دیگری توانش، مثل: $۵^{۲۷}$ و $۲^{۷۰}$، در این صورت یکی از ایده‌ها این است که یکی از حالت‌های قبل را ایجاد کنیم، یعنی یا توان برابر بسازیم و یا پایه‌ها را یکی کنیم و یا حالت اخیر:

$$\begin{cases} ۲^{۷۰} = (۲^{۷})^{۱۰} = ۱۲۸^{۱۰} \\ ۵^{۲۷} = (۵^{۳})^{۹} = ۱۲۵^{۹} \end{cases} \Rightarrow ۱۲۵^{۹} < ۱۲۸^{۱۰}$$

مرتضی طاهری

تست: ترتیب اعداد $A = ۱۶^{۴}$ ، $B = ۸^{۵}$ ، $C = ۳۱^{۳}$ و $D = ۵^{۹}$ در کدام گزینه آمده است؟

۱) $D > A > B > C$
۲) $A > D > B > C$
۳) $D > A > C > B$
۴) $A > D > C > B$

مرتضی طاهری

مربع و مکعب کامل

۱) **مربع (مجذور) کامل**: به اعدادی مربع یا مجذور کامل می‌گویند که وقتی به عوامل اول تجزیه شدند، توان همهٔ آن‌ها زوج باشد؛ مثل:

$$۷۵^۲ \times ۳ = (۳ \times ۵^۲)^۳ \times ۳ = ۳^۳ \times ۵^۶ \times ۳ = ۳^۴ \times ۵^۶$$

اعداد مربع کامل عبارت‌اند از: $۰, ۱, ۴, ۹, ۱۶, ۲۵, ۳۶, ۴۹, ...$

نکته:

۱) اعداد مربع کامل، جذر کامل دارند؛ مثل:

$$\sqrt{49}=7\ ,\ \sqrt{5^2\times 2^4}=5\times 2^2=20$$

۲) اعداد مربع کامل را می‌شود به صورت حاصل‌ضرب چند مربع کامل نوشت؛ مثل:

$$16=4\times 4=(2^2)\times(2^2)\ ,\ 5^4\times 7^6=5^4\times 7^4\times 7^2=35^4\times 7^2$$

۳) فقط اعداد مربع کامل‌اند که تعداد شمارنده‌های مثبت آن‌ها **فرد** است؛ مثل:

$A=5^4\times 7^6 \Rightarrow$ A تعداد شمارنده‌های مثبت $=(4+1)(6+1)=5\times 7$

۴) یکان اعداد مربع کامل هیچ وقت ۲، ۳، ۷ و ۸ نیست.

تست: عدد A مربع کامل است و رقم یکان آن صفر است. رقم دهگان آن کدام می‌تواند باشد؟ (انرژی اتمی)

۱) ۴
۲) ۶
۳) صفر
۴) هر سه

مرتضی طاهری

تست: کوچک‌ترین عددی که باید در $۱۲۵ \times ۱۴۰ \times ۲^۳$ ضرب شود تا این عدد، جذر کامل داشته باشد، کدام است؟

۱) ۱۴ ۲) ۲۸ ۳) ۷۰ ۴) این عدد، مربع کامل است.

مرتضی طاهری

تست: چند عدد صحیح و مثبت وجود دارد که تعداد ارقام مربع و مکعب آن‌ها با هم برابر باشد؟ (کانگورو)

۱) صفر ۲) ۳ ۳) ۴۲ ۴) ۹

مرتضی طاهری

تست: فرض کنید S و Q به ترتیب تعداد عددهای مربع کامل و تعداد عددهای مکعب کامل عضو مجموعهٔ $A=\{۱,۲,۳,۴,...,۱۳۹۶^۶\}$ باشند؛ در این صورت کدام گزینه درست است؟

۱) $S=۱۳۹۶Q$
۲) $Q=۱۳۹۶S$
۳) $۲S=۳Q$
۴) $۳S=۲Q$

مرتضی طاهری

کاربرد توان

در این قسمت می‌خواهیم چندتا نکتهٔ مهم و کاربردی را به همراه یک تست نمونه بیاوریم. اثبات نکته‌ها خیلی ساده است، خودتان از عهده‌اش برمی‌آیید:

نکته:

① اعدادی که یکان آن‌ها ۰، ۱، ۵ و ۶ باشد، به هر توان طبیعی برسند، یکانشان تغییر نمی‌کند.

② در مورد اعدادی که یکان آن‌ها ۴ یا ۹ باشد، این‌طور می‌گوییم:

عدد با یکان ۴ = فرد(عدد با یکان ۴) , عدد با یکان ۶ = زوج(عدد با یکان ۴)

عدد با یکان ۹ = فرد(عدد با یکان ۹) , عدد با یکان ۱ = زوج(عدد با یکان ۹)

③ اعدادی که یکان آن‌ها ۲، ۳، ۷ و ۸ باشد، ۴تا ۴تا تکرار می‌شوند؛ مثلاً برای اعداد با یکان ۳ داریم:

$۳^۱ = ۳,\ ۳^۲ = ۹,\ ۳^۳ = ۲۷,\ ۳^۴ = ۸۱,\ ۳^۵ = ۲۴۳,\ ۳^۶ = ۷۲۹,\ \dots$

تکرار یکان‌های ۲، ۷ و ۸ را خودتان بررسی کنید.

تست: یکان حاصل $۹۳۸^{۱۷} - ۲۷۱۴^{۱۶} + ۵۲۱۶^{۱۲}$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۶ ۳) ۴ ۴) ۲

کاربرد توان

در این قسمت می‌خواهیم چندتا نکتهٔ مهم و کاربردی را به همراه یک تست نمونه بیاوریم. اثبات نکته‌ها خیلی ساده است، خودتان از عهده‌اش برمی‌آیید:

نکته:

① اعدادی که یکان آن‌ها ۰، ۱، ۵ و ۶ باشد، به هر توان طبیعی برسند، یکانشان تغییر نمی‌کند.

② در مورد اعدادی که یکان آن‌ها ۴ یا ۹ باشد، این‌طور می‌گوییم:

عدد با یکان ۴ = $(\text{عدد با یکان ۴})^{\text{فرد}}$ ، عدد با یکان ۶ = $(\text{عدد با یکان ۴})^{\text{زوج}}$

عدد با یکان ۹ = $(\text{عدد با یکان ۹})^{\text{فرد}}$ ، عدد با یکان ۱ = $(\text{عدد با یکان ۹})^{\text{زوج}}$

③ اعدادی که یکان آن‌ها ۲، ۳، ۷ و ۸ باشد، ۴تا ۴تا تکرار می‌شوند؛ مثلاً برای اعداد با یکان ۳ داریم:

$$۳^{۱}=۳,\ ۳^{۲}=۹,\ ۳^{۳}=۲۷,\ ۳^{۴}=۸۱,\ ۳^{۵}=۲۴۳,\ ۳^{۶}=۷۲۹,\ \dots$$

تکرار یکان‌های ۲، ۷ و ۸ را خودتان بررسی کنید.

تست: یکان حاصل $۵۲۱۶^{۱۲}+۲۷۱۴^{۱۶}-۹۳۸^{۱۷}$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۶ ۳) ۴ ۴) ۲

نکته: برای محاسبهٔ تعداد صفرهای سمت راست عدد A، باید ببینیم در تجزیهٔ A چند شمارندهٔ ۲ و چند شمارندهٔ ۵ وجود دارد. چون حاصل‌ضرب هر ۲ در هر ۵ می‌شود ۱۰، تعداد صفرها می‌شود تعداد (۲×۵)ها:

$A=۲^{m}\times۵^{n}\times\cdots \Rightarrow$
- اگر $m<n \Rightarrow$ تعداد صفرهای سمت راست برابر m است.
- اگر $n<m \Rightarrow$ تعداد صفرهای سمت راست برابر n است.

تست: اگر تعداد صفرهای عدد $۵^{۵۳}\times۳^{۴}\times۲^{۵۹}$ را A و اولین رقم غیرصفر آن را از سمت راست، B بنامیم، حاصل $A-۲B$ کدام است؟

۱) ۳۶ ۲) ۵۴ ۳) ۴۵ ۴) ۴۸

تست: حاصل‌جمع «مجموع ارقام» و «تعداد ارقام» عدد $۳۲^{۱۶} \times ۱۲۵^{۲۸} \times ۳$ کدام است؟

۱) ۱۰۰
۲) ۱۱۰
۳) ۱۰۵
۴) ۱۱۵

مرتضی طاهری

معادلهٔ توانی

به معادلاتی که مجهول در توان اعداد باشد، اصطلاحاً «معادلهٔ توانی» می‌گوییم؛ مثل: $۸ = ۲^x$ یا $۲۵ = ۵^{x-۱}$. برویم تا چندتا تست از تیپ‌های معروف معادلات توانی حل کنیم:

تست: جواب معادلهٔ $۴۹^{۲} = ۳۴۳^{-x} \times (\frac{۱}{۴۹})^{-۲x-۱}$ در کدام گزینه آمده است؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

مرتضی طاهری

تست: مقدار b با توجه به تساوی $۲^{b+۳} + ۱۱ \times ۲^{b} = ۳۰۴$ در کدام گزینه آمده است؟

۱) ۲
۲) ۸
۳) ۶
۴) ۴

مرتضی طاهری

تست: با فرض $۷^{\frac{s-۳}{۴}} = ۵^{s-t+۲}$، حاصل $(۲s-t)^۲$ کدام است؟

۱) ۱
۲) ۴
۳) ۹
۴) ۱۶

مرتضی طاهری

تست: معادلهٔ $(۲m-۱)^{m+۴}=۱$ چند جواب صحیح دارد؟

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) ۴

مرتضی طاهری