

ب.م.م

ب.م.م دو عدد a و b بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه (شمارنده) مشترک آنها است که آن را با نماد (a, b) نمایش می‌دهند. اما چه‌طور باید ب.م.م دو عدد را پیدا کرد؟

دو عدد $a = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5$ و $b = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7 \times 7$ را در نظر بگیرید. دقت کنید که a و b هر دو مضرب ۲ هستند، پس ۲ شمارنده مشترک دو عدد a و b است. هم‌چنین به عنوان مثال عددهای ۳، ۵، 2×3 ، $2 \times 2 \times 5$ و ... هم شمارنده‌های مشترک a و b هستند، حالا توجه کنید که برای به دست آوردن بزرگ‌ترین شمارنده مشترک دو عدد a و b ، باید تمام شمارنده‌های اول و مشترک بین a و b را با توجه به تعداد تکرار آنها در هم ضرب کنیم؛ مثلاً چون a و b در دو شمارنده ۲، سه شمارنده ۳ و یک شمارنده ۵ با هم مشترک هستند، پس می‌توان گفت که عدد $2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5$ بزرگ‌ترین شمارنده مشترک a و b است؛ یعنی:

$$(a, b) = \underbrace{2 \times 2}_{\text{تا } 2} \times \underbrace{3 \times 3 \times 3}_{\text{تا } 3} \times \underbrace{5}_{\text{یکی}} = 540$$


نکته: تعداد شمارنده‌های مشترک دو عدد a و b برابر است با تعداد شمارنده‌های (a, b) . در واقع چون هر شمارنده (a, b) هم شمارنده a است و هم شمارنده b ، پس کل شمارنده‌های (a, b) هم شمارنده a هستند و هم b .



تست: دو عدد 240 و 360 چند شمارندهٔ مشترک دارند؟

(۱) تا ۱۲

(۲) تا ۱۴

(۳) تا ۱۶ ✓

(۴) تا ۱۸

$$240 = 2^4 \times 3^1 \times 5^1$$

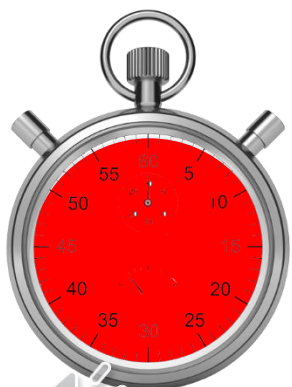
$$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5^1$$

$$(240, 360) = 2^3 \times 3^1 \times 5^1$$

$$(3+1) \times (1+1) \times (1+1) = 12$$



هوشلند



تست: دو عدد $A = 49 \times 15 \times 4$ و $B = 20 \times 98$ چند شمارنده مشترک مضرب V دارند؟

(۱) تا ۱۶

(۲) تا ۱۴

(۳) تا ۱۰

(۴) تا ۲۰ ✓

$$A = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7^2$$

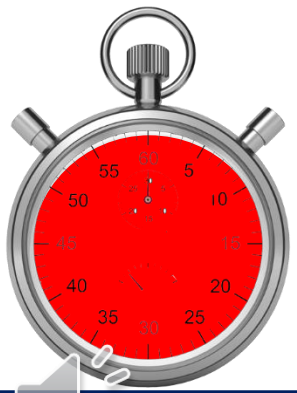
$$B = 2^2 \times 5 \times 7 \times 2^2 = 2^4 \times 5 \times 7$$

$$(A, B) = 2^2 \times 5 \times 7$$

$$\frac{2^2 \times 5 \times 7^2}{7} = 2^2 \times 5 \times 7$$

$$(2+1) \times (1+1) \times (1+1) = 12$$

* زمانه که کاره مغرب - حال شریک کم
مغرب - آیا بشه پیدا کنیم نه با تقسیم
حالا کم رتعداد شمارنده ها حال بقیه در پیدا کنیم



تست: اگر $(x, 40) = 4$ ، آن وقت x برابر کدام یک از گزینه‌های زیر می‌تواند باشد؟

$92 \quad (3 \quad 2^2 \times 2^3)$

~~$42 \quad (2 \quad 3 \times 7 = 21)$~~ ~~$1) \quad (1)$~~

در 40 عامل 2 فقط 2

در x نیز 2 دقیقاً 2 بار

$(x, 40) = 2^2$

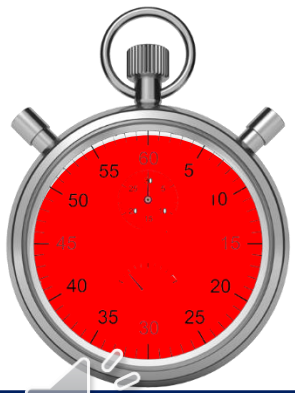
2×2^3
 $54 \quad (4)$

$40 = 2^3 \times 5$

$x =$



هوش‌سازند



تست: اگر $70 = (7x, 4900)$ ، آن وقت $(2x, 80)$ برابر است با

$70 = (4$

$40 = (3$

$50 = (2$

$20 = (1$

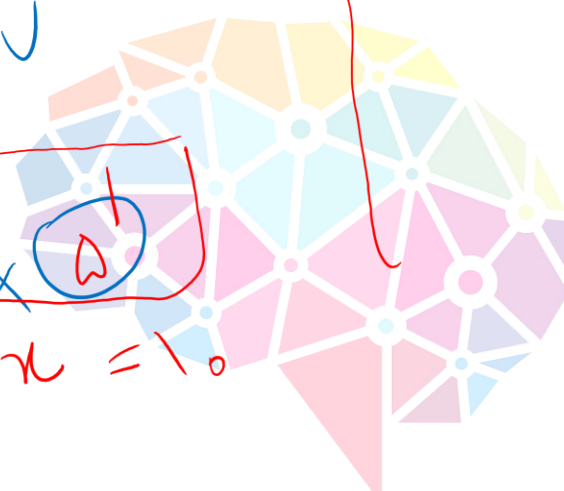
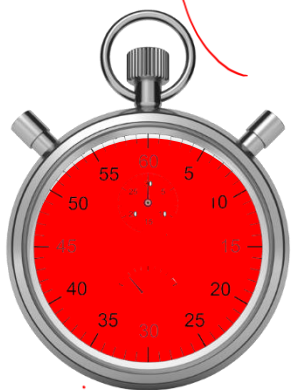
$$70 = 7 \times 10 \times 1$$

$$4900 = 7^2 \times 10^2 \times 1^2$$

$$7x = 7 \times$$

$$x = 10$$

$$(2 \times 10, 80) = (20, 80) = 20$$



هوشلند

$$(8, 9) = 1$$

$$(21, 32) = 1$$

① اگر دو عدد طبیعی مثل a و b هیچ شمارنده مشترک بزرگتر از ۱ نداشته باشند، آن وقت اصطلاحاً می‌گوییم a و b نسبت به هم اول هستند و می‌نویسیم $(a, b) = 1$ ؛ مثلاً دو عدد ۲۱ و ۳۲ نسبت به هم اول هستند. چون:

$$(21, 32) = 1 \Rightarrow 21 \text{ و } 32 \text{ شمارنده مشترکی ندارند (جز ۱)}. \Rightarrow 21 = 3 \times 7, 32 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$$

② عدد ۱ و هر عدد طبیعی دیگر نسبت به هم اول هستند؛ یعنی اگر a عددی طبیعی و دلخواه باشد، آن وقت $(a, 1) = 1$.

③ دو عدد اول مختلف همیشه نسبت به هم اول هستند؛ یعنی اگر p و q دو عدد اول مختلف باشند، آن وقت $(p, q) = 1$ ؛ مثلاً $(11, 13) = 1$ یا $(97, 107) = 1$.

④ هر دو عدد متوالی نسبت به هم اول هستند؛ یعنی اگر a عددی طبیعی باشد، آن وقت $(a, a+1) = 1$ ؛ مثلاً $(3, 4) = 1$.

⑤ اگر a شمارنده b باشد، آن وقت $(a, b) = a$. چون در این صورت b مضرب a است؛ مثلاً $b = a \times t$ و در نتیجه داریم:

$$(a, b) = (a, a \times t) = a$$

$$(27, 81) = 27$$

↓
27×3

$$(8, 8) = 8$$

مثلاً چون ۲۷ شمارنده ۸۱ است یا به عبارت دیگر ۸۱ مضرب ۲۷ است؛ پس داریم:

⑥ چون هر عدد مضرب خودش است $(a = 1 \times a)$ ، پس $(a, a) = a$ ؛ مثلاً $(96, 96) = 96$.

⑦ اگر p عددی اول، a عدد طبیعی و p شمارنده a باشد، آن وقت $(a, p) = p$. اما اگر p شمارنده a نباشد، آن وقت $(p, a) = 1$ ؛ مثلاً $(11, 99) = 11$.

$$\text{ولی } (11, 25) = 1$$



Ⓐ اگر a ، b و c سه عدد طبیعی باشند، آن وقت $(ac, bc) = c \times (a, b)$ ؛ مثلاً چون $۲۰۰ = ۲۰ \times ۱۰$ و $۱۲۰ = ۱۲ \times ۱۰$ ، پس:

$$(۱۲۰, ۲۰۰) = (۱۲ \times ۱۰, ۲۰ \times ۱۰) = ۱۰ \times (۱۲, ۲۰) = ۱۰ \times (۲ \times ۲ \times ۳, ۲ \times ۲ \times ۵) = ۱۰ \times ۲ \times ۲ = ۴۰$$

Ⓘ اگر $(x, y) = ۱$ ، آن وقت $(x, \underbrace{y \times y \times y \times \dots \times y}_{\text{تعداد دلخواه}}) = ۱$ و هم‌چنین $(\underbrace{x \times x \times x \times \dots \times x}_{\text{tm}}, \underbrace{y \times y \times y \times \dots \times y}_{\text{tn}}) = ۱$ ؛ مثلاً چون $(۲, ۳) = ۱$

$$\begin{array}{ccc} ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ & & ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ \\ \uparrow & & \uparrow \\ (۶۴, ۸۱) = ۱ & \text{یا} & (۱۶, ۳) = ۱ \\ \downarrow & & \\ ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ & & \end{array}$$

پس



تست: تعداد اعداد کم تر از ۵۵ که نسبت به آن اول هستند، برابر است با

۶۳۸ (۱)

۶۴۰ (۲) ✓

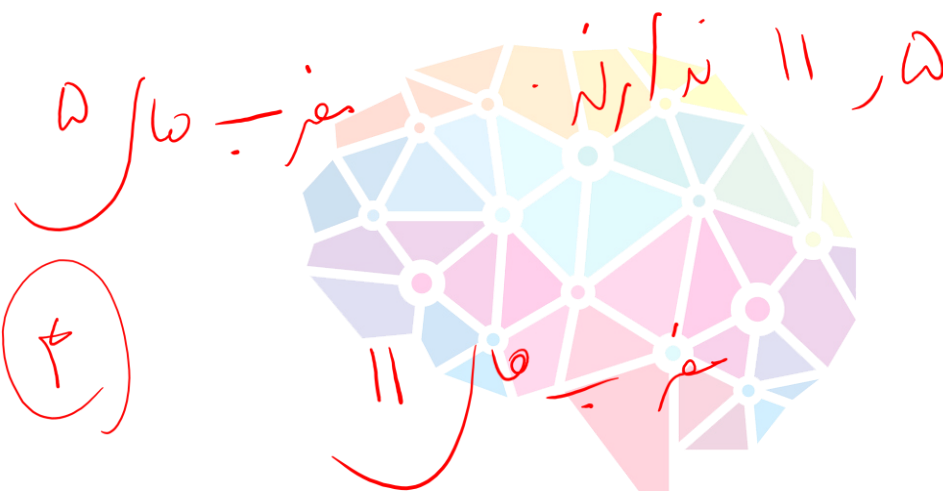
۶۴۲ (۳)

۶۴۴ (۴)

$$(5, 5) = 1$$

دنبال اعدادی بگردیم که عمل LCM عمل HCF را برساند

$$54 - (10 + 2) = 42$$

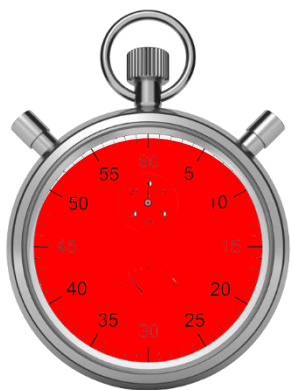


هوشلند

$$55 = 5 \times 11$$

$$\left[\frac{54}{5} \right] = (10)$$

$$\left[\frac{54}{11} \right] = (4)$$



تست: اگر $(3a, 8) = 1$ ، آن وقت $(4a, 16)$ برابر است با

۸ (۴)

$$(3 \boxed{9}, 8) = 1 \rightarrow$$

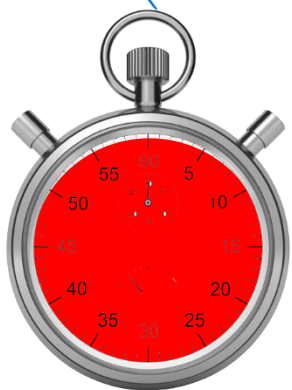
۴ (۳) ۲ (۲) ۱ (۱)

✓

$a = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, \dots$

~~$(4 \boxed{9}, 16) = 4$~~

$(4 \boxed{14}, 16) = 4$



تست: اگر x و y دو عدد طبیعی و بزرگ تر از ۱ باشند که $(x, y) = 1$ و $xy = 441$ ، آن وقت $x + y$ برابر است با

۶۴ (۴)

۶۲ (۳)

۶۰ (۲)

۵۸ (۱)

۴ ← ۱
 ۳
 ۳
 ۷
 ۷

۴ ← ۱ = $\begin{matrix} ۲ \\ ۲ \\ ۳ \end{matrix} \times \begin{matrix} ۲ \\ ۲ \\ ۷ \end{matrix}$

$x \qquad y$

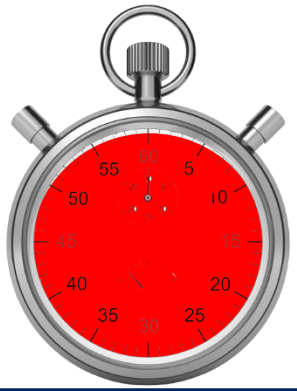
$x = 9$

$y = 29$

$x + y = 9 + 29 = 38$



هوشلند



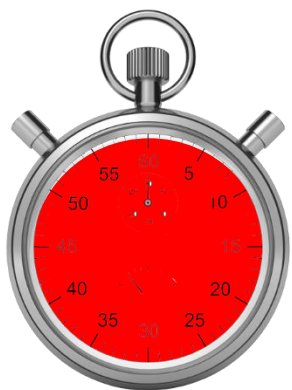
تست: اگر X ، Y و Z سه عدد طبیعی بزرگ تر از ۱ و مختلف باشند به طوری که X شمارنده Y و Y شمارنده Z باشد، آن وقت حاصل $(Y, (X, Z))$ برابر کدام گزینه است؟

(۴) هر سه گزینه قبلی صحیح اند.

(۳) Z

(۲) Y

(۱) X



تست: مجموع ارقام کوچک ترین عدد طبیعی که هم مضرب ۲۵۲ است و هم مضرب ۱۲۰، برابر است با

۱۸ (۴)

۱۵ (۳)

۹ (۲)

۶ (۱)

