

۱- مجموعه‌ی $A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$ چند زیرمجموعه دارد که هر کدام لااقل ۲ عضو داشته باشد؟

۶۴ (۴)

۵۹ (۳)

۵۷ (۲)

۳۲ (۱)

۲- تعداد زیرمجموعه‌های ۳ عضوی مجموعه‌ای دو برابر تعداد زیرمجموعه‌های ۴ عضوی همان مجموعه است. این مجموعه دارای چند عضو است؟

۸ (۴)

۶ (۳)

۴ (۲)

۵ (۱)

۳- در کیسه‌های ۴ مهره قرمز، ۵ مهره سفید و ۱ مهره آبی وجود دارد. سه مهره پشت سر هم و بدون جای‌گذاری (مهره‌های برداشته شده را به کیسه بر نمی‌گردانیم) درمی‌آوریم. چقدر احتمال دارد که اولی قرمز، دومی سفید و سومی آبی باشد؟

$\frac{1}{50}$ (۴)

$\frac{1}{36}$ (۳)

$\frac{3}{100}$ (۲)

$\frac{1}{48}$ (۱)

۴- حاصل عبارت $\frac{3}{1 \times 3} + \frac{3}{3 \times 5} + \frac{3}{5 \times 7} + \dots + \frac{3}{1391 \times 1393}$ کدام است؟

$\frac{1393}{1392}$ (۴)

$\frac{696}{1393}$ (۳)

$\frac{1392}{1393}$ (۲)

$\frac{2088}{1393}$ (۱)

۵- اگر $\frac{1}{x} + \frac{1}{y + \frac{1}{z}} = \frac{5}{9}$ باشد و x, y, z اعداد طبیعی باشند، $x + y^2 + z^3$ کدام است؟

۷۶ (۴)

۶۷ (۳)

۶۶ (۲)

۶۳ (۱)

۶- می‌خواهیم ثابت کنیم «اگر از مرکز دایره به وسط یک وتر رسم کنیم، آن خط بر وتر عمود می‌شود.» از کدام حالت هم‌نهشتی مثلث استفاده می‌کنیم؟

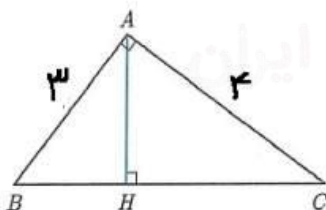
ض ض ض (۴)

ض ض ض (۳)

وز (۲)

وض (۱)

۷- در شکل زیر نسبت تشابه دو مثلث ABH و ABC کدام است؟



$\frac{5}{8}$ (۲)

$\frac{4}{7}$ (۱)

$\frac{8}{7}$ (۴)

$\frac{6}{7}$ (۳)

۸- اندازه‌ی محیط‌های دو مثلث متشابه ۱۵ و ۸ است. اگر مساحت مثلث بزرگ‌تر ۲۵ واحد مربع باشد، مساحت مثلث کوچک‌تر کدام است؟

$7\frac{2}{9}$ (۴)

$7\frac{1}{9}$ (۳)

$6\frac{2}{9}$ (۲)

$6\frac{1}{9}$ (۱)

۹- حاصل عبارت $2^{7^2} - 8^{16}$ کدام است؟

16^{12} (۴)

$\frac{-1}{2^{20}}$ (۳)

2^{-20} (۲)

۲ (۱)

۱۰- حاصل T در عبارت کدام گزینه است؟

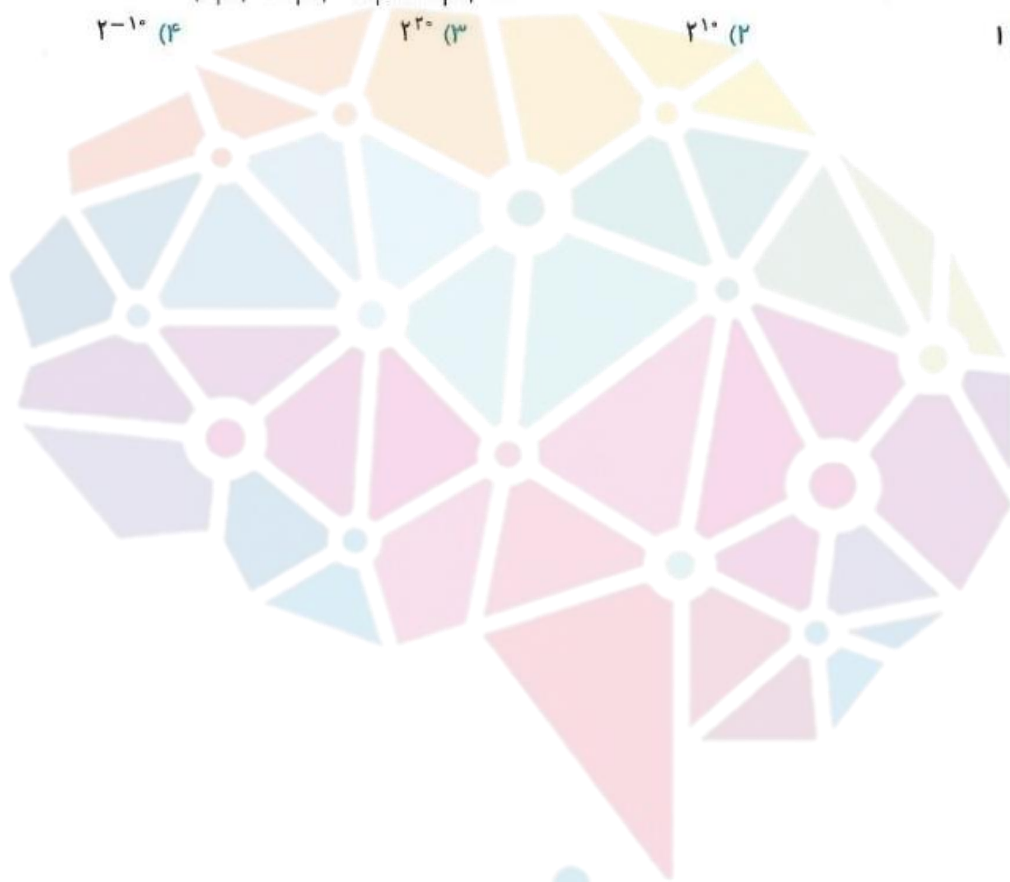
$$T = \frac{1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{10}}{1 + 2^{-1} + 2^{-2} + \dots + 2^{-10}}$$

2^{-10} (۴)

2^{20} (۳)

2^{10} (۲)

۱ (۱)



مغوشانند

سرزمین تیزهوشان ایران

۱- مجموعه‌ی $A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$ چند زیرمجموعه دارد که هر کدام لااقل ۲ عضو داشته باشد؟

$64 (4)$ $59 (3)$ $57 (2)$ $32 (1)$

باید از تعداد کل زیرمجموعه‌ها، تعداد زیرمجموعه‌های ۰ عضوی (2^0) و ۱ عضوی را کم کنیم:

$$2^6 - (1 + 6) = 64 - 7 = 57$$

۲- تعداد زیرمجموعه‌های ۳ عضوی مجموعه‌ای دو برابر تعداد زیرمجموعه‌های ۴ عضوی همان مجموعه است. این مجموعه دارای چند عضو است؟

$8 (4)$ $6 (3)$ $4 (2)$ $5 (1)$

$$\binom{n}{3} = 2 \times \binom{n}{4} \Rightarrow \frac{n!}{3! \times (n-3)!} = 2 \times \frac{n!}{4! \times (n-4)!}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4 \times (n-3) \times (n-4)!} = 2 \times \frac{1}{4 \times 3 \times 2 \times 1 \times (n-4)!} \Rightarrow \frac{1}{4(n-3)} = \frac{1}{12}$$

$$\Rightarrow n-3 = 3 \Rightarrow n = 6$$

۳- در کیسه‌ای ۴ مهره قرمز، ۵ مهره سفید و ۱ مهره آبی وجود دارد. سه مهره پشت سر هم و بدون جای‌گذاری (مهره‌های برداشته شده را به کیسه بر نمی‌گردانیم) درمی‌آوریم. چقدر احتمال دارد که اولی قرمز، دومی سفید و سومی آبی باشد؟

$\frac{1}{50} (4)$ $\frac{1}{36} (3)$ $\frac{3}{100} (2)$ $\frac{1}{48} (1)$

باید دقت کرد که مهره‌ها را بدون جای‌گذاری برمی‌داریم؛ بنابراین هر بار یکی از تعداد کل مهره‌ها کاسته می‌شود:

$$\frac{4}{10} \times \frac{5}{9} \times \frac{1}{8} = \frac{20}{720} = \frac{1}{36}$$

۴- حاصل عبارت $\frac{3}{1 \times 3} + \frac{3}{3 \times 5} + \frac{3}{5 \times 7} + \dots + \frac{3}{1391 \times 1393}$ کدام است؟

$\frac{1392}{1392}$ (۴)

$\frac{696}{1392}$ (۳)

$\frac{1392}{1392}$ (۲)

$\frac{2088}{1392}$ (۱)

$$\frac{3}{2} \times \left(\frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} + \dots + \frac{1}{1391 \times 1393} \right)$$

$$= \frac{3}{2} \times \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{1393} \right) = \frac{3}{2} \times \frac{1392}{1393} = \frac{2088}{1393}$$

۵- اگر $\frac{1}{x + \frac{1}{y + \frac{1}{z}}} = \frac{5}{9}$ باشد و x, y, z اعداد طبیعی باشند، کدام است؟

۷۶ (۴)

۶۷ (۳)

۶۶ (۲)

۶۳ (۱)

$$\frac{5}{9} = \frac{1}{\frac{9}{5}} = \frac{1}{1 + \frac{4}{5}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{5}{4}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{x + \frac{1}{y + \frac{1}{z}}}}$$

$\Rightarrow 1 + 1^2 + 4^2 = 17$

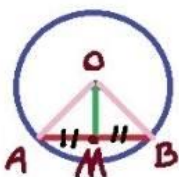
۶- می‌خواهیم ثابت کنیم «اگر از مرکز دایره به وسط یک وتر رسم کنیم، آن خط بر وتر عمود می‌شود.» از کدام حالت هم‌نهشتی مثلث استفاده می‌کنیم؟

فرض (۴)

فرض (۳)

وز (۲)

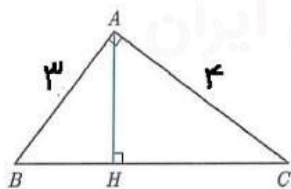
واض (۱)



$\left. \begin{array}{l} \overline{OA} = \overline{OB} \text{ شعاع دایره} \\ \overline{OM} = \overline{OM} \text{ مشترک} \\ \overline{AM} = \overline{MB} \text{ وسط M} \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta OAM \cong \Delta OBM \Rightarrow \hat{M}_1 = \hat{M}_2$

صن‌صن‌صن $= \frac{180}{2} = 90^\circ$

۷- در شکل زیر نسبت تشابه دو مثلث ABC و ABH کدام است؟



$\overline{BC} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

۰٫۵ (۲)

۰٫۴ (۱)

۰٫۸ (۴)

۰٫۶ (۳)

نسبت تشابه $= \frac{\text{دایره } \Delta ABH}{\text{دایره } \Delta ABC} = \frac{3}{5} = ۰٫۶$

۸- اندازه‌ی محیط‌های دو مثلث متشابه ۱۵ و ۸ است. اگر مساحت مثلث بزرگ‌تر ۲۵ واحد مربع باشد، مساحت مثلث کوچک‌تر کدام است؟

$$7\frac{2}{9} \quad (4)$$

$$7\frac{1}{9} \quad (3)$$

$$6\frac{2}{9} \quad (2)$$

$$6\frac{1}{9} \quad (1)$$

نسبت $\frac{8}{15}$ دو مثلث، $\frac{8}{15}$ است. نسبت مساحت‌ها $\frac{44}{225}$ است.

است. داریم:

$$\frac{44}{225} = \frac{x}{25} \Rightarrow x = \frac{44}{9} = 7\frac{1}{9}$$

۹- حاصل عبارت $2^{7^2} - 8^{16}$ کدام است؟

$$16^{12} \quad (4)$$

$$\frac{-1}{2^{20}} \quad (3)$$

$$2^{-20} \quad (2)$$

$$2 \quad (1)$$

$$2^{7^2} - 8^{16} = 2^{49} - (2^3)^{16} = 2^{49} - 2^{48} = 2^{48}(2 - 1) = 2^{48} = (2^4)^{12} = 16^{12}$$

۱۰- حاصل T در عبارت کدام گزینه است؟

$$T = \frac{1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{10}}{1 + 2^{-1} + 2^{-2} + \dots + 2^{-10}}$$

$$2^{10} \quad (2)$$

$$1 \quad (1)$$

$$T = \frac{(1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{10})}{2^{-10} (1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{10})} = \frac{1}{2^{-10}} = 2^{10}$$