



استاد وحید اسدی کیا



تپوشاند

سازمان تیزهوشان ایران



فصل اول : مجموعه ها و احتمال

فصل دوم : اعداد حقیقی

فصل سوم : هندسه

فصل چهارم : توان و ریشه

فصل پنجم : جبر

فصل ششم : معادله خط

فصل هفتم : عبارات های صریح گویا $\frac{a}{b}$

فصل هشتم : حجم

لکچرین: از ۱۷۱ تا ۲۰۱ شماره های روز

$\frac{1}{2} = \frac{1}{4} = \frac{1}{6}$

۲۳۹. با توجه به معادله $\frac{8^3 - 2x \times 125^{1-y}}{25^y \times 16x + 2} = 1$ حاصل $10x + y$ چه قدر است؟

$(8^3)^{2x} \times (5^3)^{1-y} = \left(\frac{1}{6}\right)^y \times (2^4)^{x+2}$
 $\Rightarrow 2^6 \times 5^3 \times 5^{-3y} = 2^{-2y} \times 3^{-y} \times 2^{4x+8}$
 $\Rightarrow 2^{6-2y} \times 5^{3-3y} = 2^{-2y} \times 3^{-y} \times 2^{4x+8}$

$5^{3-3y} = 1 \Rightarrow 3-3y = 0 \Rightarrow y = 1$
 $\Rightarrow 2^{6-2(1)} \times 5^{3-3(1)} = 2^{-2(1)} \times 3^{-1} \times 2^{4x+8}$
 $\Rightarrow 2^4 \times 5^0 = 2^{-2} \times 3^{-1} \times 2^{4x+8}$

$9 - 4x = \frac{3}{2} + 2^{4x+8}$
 $\Rightarrow 9 - 4x = \frac{3}{2} + 2^{4x+8}$

$3 = 1 \cdot x$

$\Rightarrow 10x + y = 3 + 1 = 4$





استاد وحید اسدی کیا



توان و بخش پذیری و باقی مانده

نکته:

$$\begin{array}{r} a \quad | \quad b \\ \vdots \\ r \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} a^n \quad | \quad b \\ \vdots \\ r^n \end{array}$$

$$\begin{array}{r} a \quad | \quad b \\ \vdots \\ r \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} a \text{ متساوی} \\ \vdots \\ r^{x+m} \end{array}$$

باقی مانده \rightarrow $\begin{array}{r} r \\ \vdots \\ r^{x+m} \end{array}$

باقی مانده، یعنی

بر عدد ۱۲ چندتا ۵؟


$$\begin{array}{r} 14.3 \\ 5 + 9 \quad | \quad 12 \\ \vdots \\ 1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} 14.3 \\ 5 + 9 \quad | \quad 12 \\ \vdots \\ (1)^{7.1} \end{array}$$

باقی مانده

$$\begin{array}{r} 14.3 \\ 5 + 9 \quad | \quad 12 \\ \vdots \\ 1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} 14.3 \\ 5 + 9 \quad | \quad 12 \\ \vdots \\ 14 \quad | \quad 12 \\ \vdots \\ 5 + 9 \quad | \quad 12 \\ \vdots \\ 2 \end{array}$$

جواب ۲ است



۲۵۷. باقی مانده‌ی تقسیم عدد 27^{150} بر ۸ برابر است با: 



$27^{150} = (3^3)^{150} = 3^{450}$
 $3^{450} = 3^{448} \cdot 3^2 = (3^8)^{56} \cdot 9$
 $(3^8)^{56} \cdot 9 \pmod{8}$
 $(1)^{56} \cdot 1 \pmod{8}$
 $1 \pmod{8}$

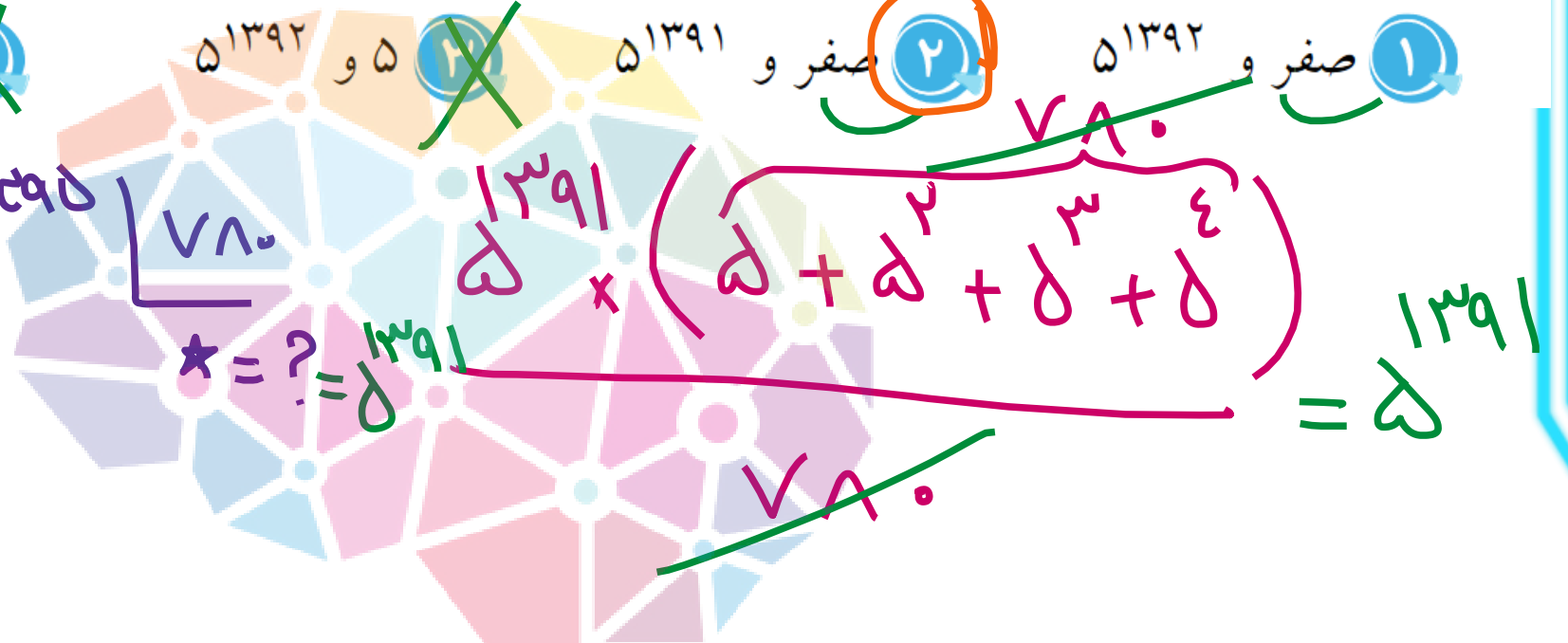
مفوشانند



۲۶۰. باقی مانده و خارج قسمت تقسیم $۵۱۳۹۲ + ۵۱۳۹۳ + ۵۱۳۹۴ + ۵۱۳۹۵$ بر عدد ۷۸۰ به ترتیب عبارت است از:

صفر و ۱ (۱) صفر و ۲ (۲) ~~۵ و ۱۳۹۱~~ (۳) ~~۵ و ۱۳۹۲~~ (۴)

$$\begin{array}{r}
 ۵۱۳۹۲ \\
 + ۵۱۳۹۳ \\
 + ۵۱۳۹۴ \\
 + ۵۱۳۹۵ \\
 \vdots \\
 \hline
 ? = ?
 \end{array}$$



مفوشانند

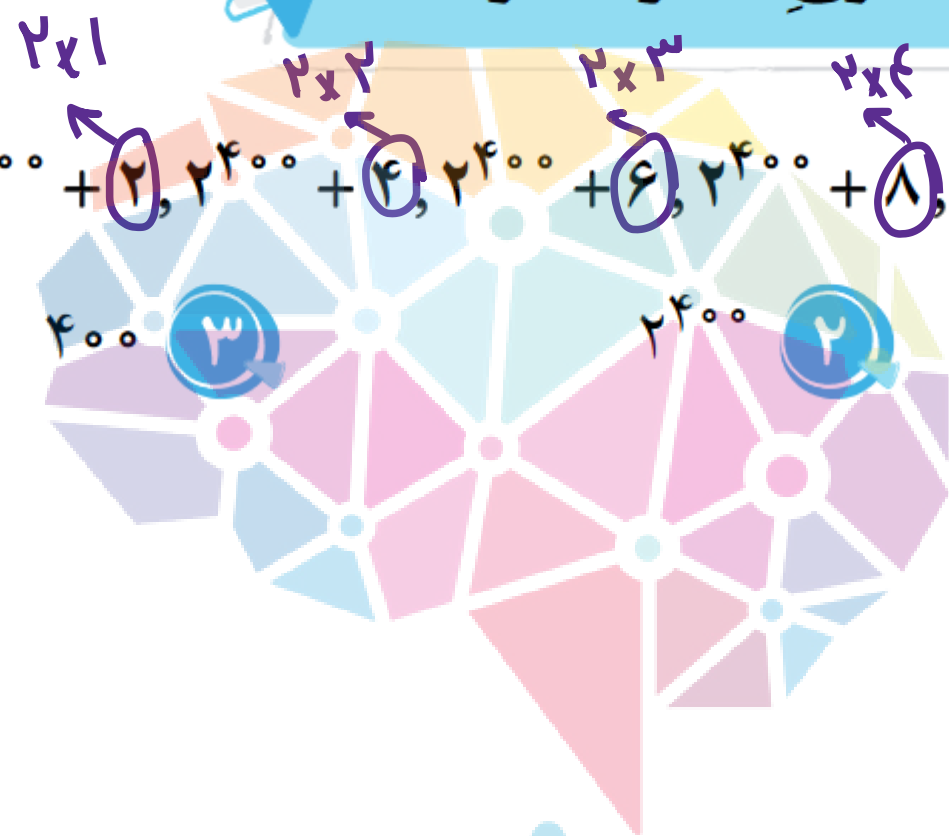
$$۵ + ۲۵ + ۱۲۵ + ۶۲۵ = ۷۸۰$$



سوالات خلاقیتی و متنوع دیگر از توان

۲۶۶. در دنباله‌ی $2^{400} + 2, 2^{400} + 4, 2^{400} + 6, \dots, 2^{400} + 2^{400} + 2$ چند عدد وجود دارد؟

۳۹۹ (۴)




$2^{400} + 2$

$2^{399} \times 2 = 2^{399} + 2^{399}$

$2^{399} \times 2$

مفوشانند



۲۷۰. به ازای چند مقدار صحیح n ، عدد $۲^{n+۳} \times ۵^{۲-n}$ ، مضربی از ۱۰ است؟ 

۴

۳

۲

۱

حداقل باید بیرون ۲ و بیرون ۵ را درگیر کنیم تا ضربی داشته باشیم.

$۲-n=۱ \Rightarrow n=۱$

$۲-n=۲ \Rightarrow n=۰$

$۲-n=۳ \Rightarrow n=-۱$

$۲-n=۴ \Rightarrow n=-۲$

مضرب هفتگانه

کوان حالات

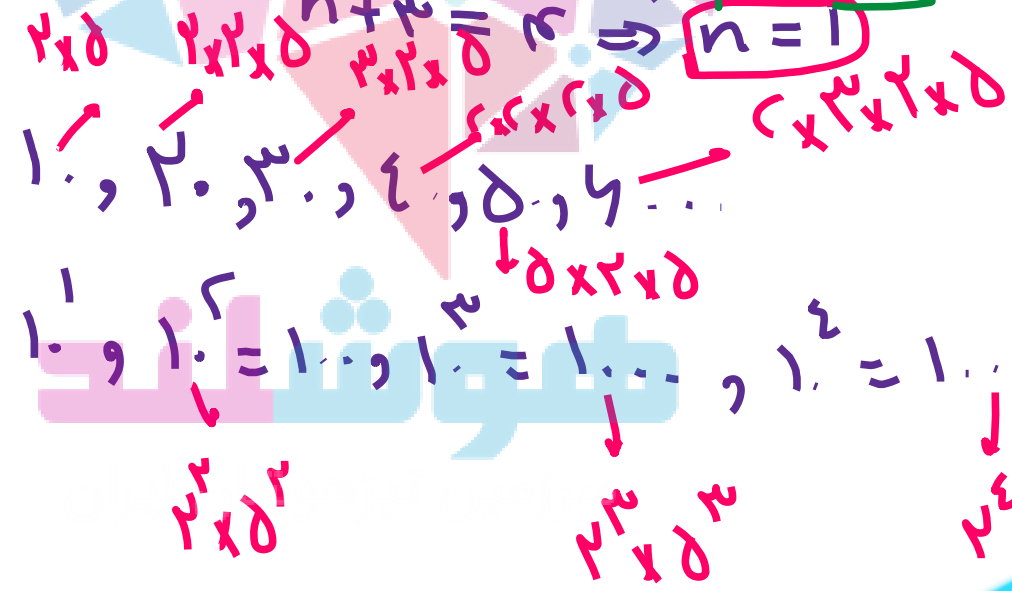
$n+۳=۱ \Rightarrow n=-۲$

$n+۳=۲ \Rightarrow n=-۱$

$n+۳=۳ \Rightarrow n=۰$

$n+۳=۴ \Rightarrow n=۱$

$n+۳=۵ \Rightarrow n=۲$



تبدیل: $(a^m)^n = (a^n)^m$

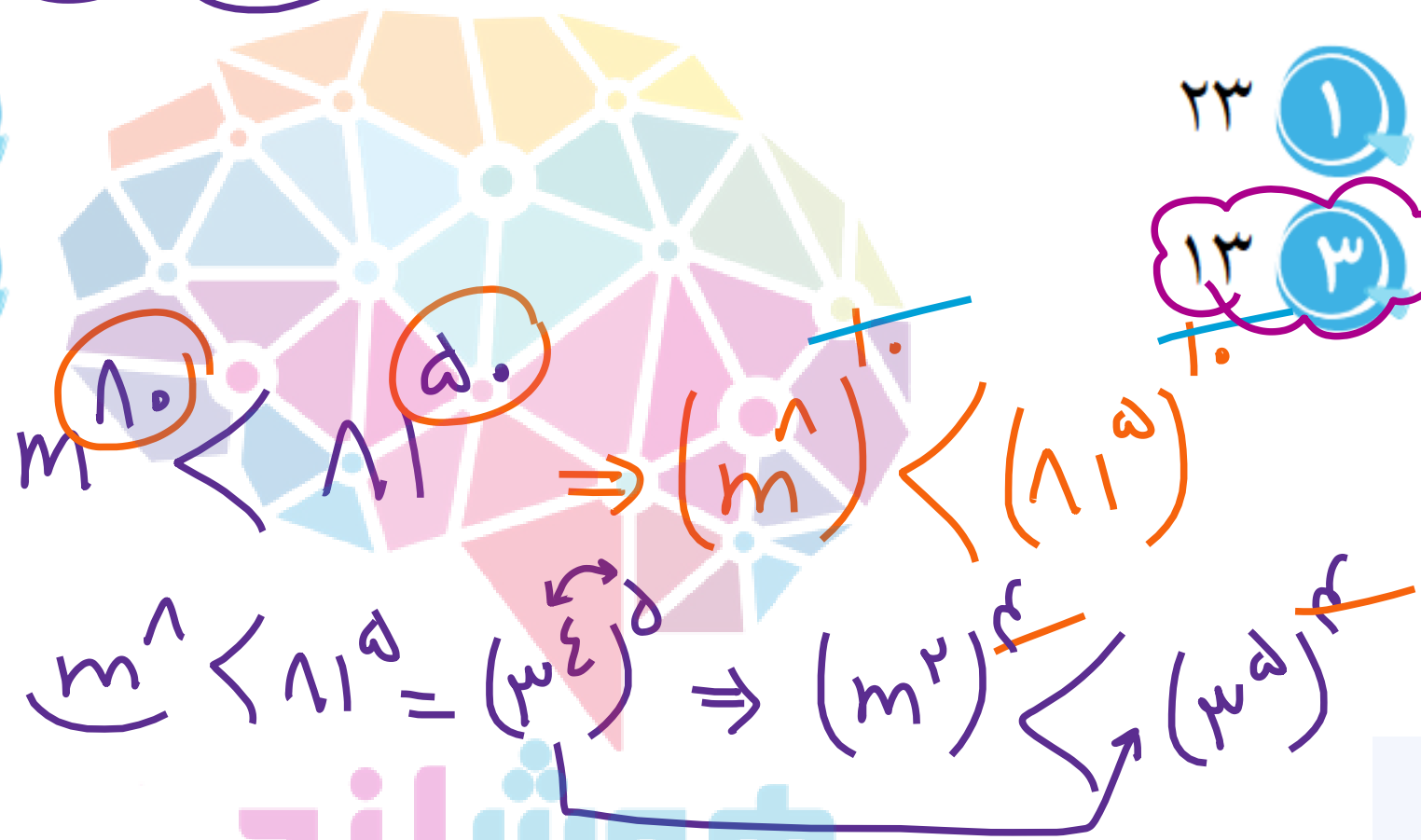
۲۷۲. بزرگترین عدد اول m به طوری که $m^{15} < 15^m$ باشد، کدام است؟

۱۹ (۲)

۱۷ (۴)

۲۳ (۱)

۱۳ (۳)



$m^{10} < 15^5 \Rightarrow (m^{10}) < (15^5)$

$m^{10} < 15^5 = (3^4 \cdot 5^1)^5 \Rightarrow (m^2)^5 < (3^4 \cdot 5^1)^5$

$\Rightarrow m^2 < 3^4 \cdot 5^1 = 243 \Rightarrow m = 13$

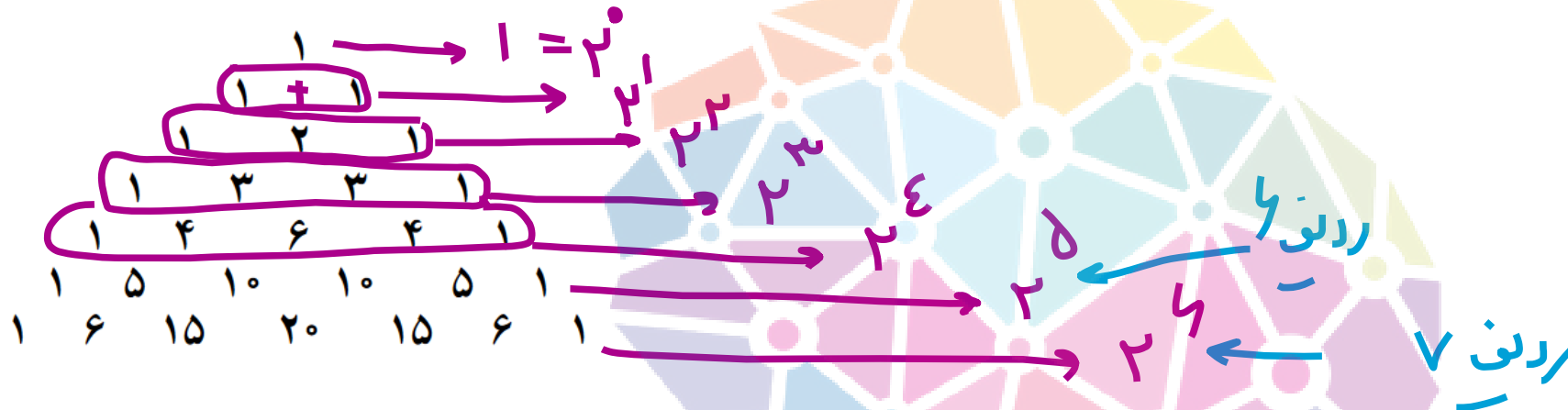
$\Rightarrow 13^2 < 243$



۲۷۸. اگر اعداد را به شکل زیر بنویسیم (مثلث خیام - پاسکال) و نوشتن اعداد را با همین الگو ادامه دهیم، جمع اعداد در

(المپیاد ریاضی)

ردیف پانزدهم این مثلث چه قدر است؟



- ۱ - ۲^{۱۴}
- ۲ - ۲^{۱۴} + ۱
- ۳ - ۲^{۱۴}
- ۴ - ۲^{۱۴} - ۲

الگو: مجموع اعداد در ردیف n ام = ۲ⁿ⁻¹

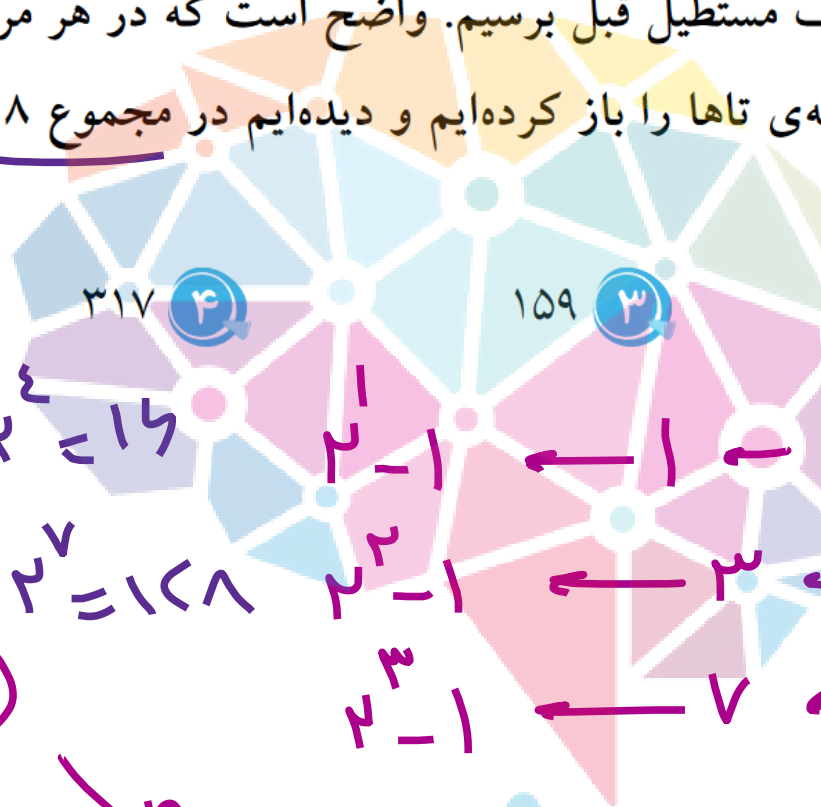
۲^{۱۴} - ۱ = ۲^{۱۵}



لغزین از ۲۰۲ تا ۲۰۴ شماره‌ها زوج

۲۸۰ ✉ کاغذی مستطیل شکل را چندین بار تا کرده‌ایم. در هر مرحله، تا بر روی خطی موازی دو ضلع و در وسط آن‌ها زده شده است تا به مستطیلی با مساحت نصف مستطیل قبل برسیم. واضح است که در هر مرحله این کار به دو روش (افقی و عمودی) امکان‌پذیر است. در نهایت، همه‌ی تاها را باز کرده‌ایم و دیده‌ایم در مجموع ۳۱۸ خط تایی افقی و عمودی تولید شده است. کاغذ چند بار تا شده است؟

(المپیاد ریاضی)



۱۴ (۲) (circled)

۱۳ (۱)

$2^1 = 2$
 $2^2 = 4$
 $2^3 = 8$
 $2^4 = 16$
 $2^5 = 32$
 $2^6 = 64$ (circled)
 $2^7 = 128$
 $2^8 = 256$ (circled)

۱ بار ← تعداد خطوط تا
 ۲ بار ← ...
 ۳ بار ← ...
 ۷ بار ← ...

$$2^n + 2^m - 2 = 318$$

$2^n + 2^m = 320$
 $2^n + 2^m = 2^6 + 2^8 = 64 + 256 = 320$



بخش دوم: جذر و ریشه گیری و فرجه




مفهوم و ریشه گیری:

مفوشاند



استاد وحید اسدی کیا



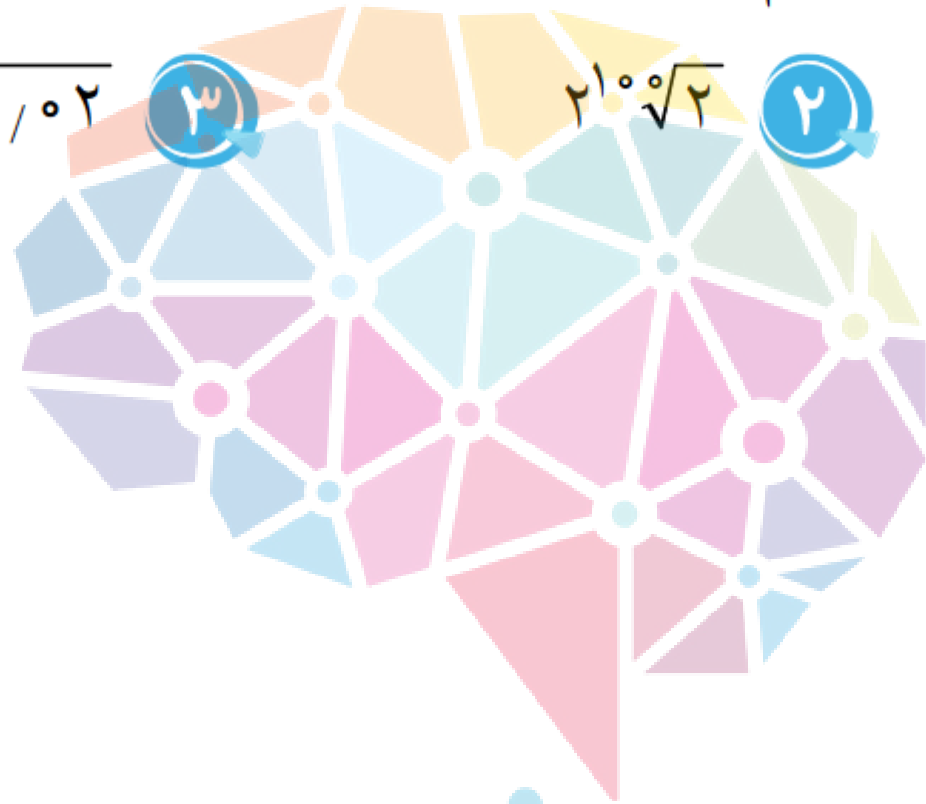
۲۹۲. مجموع ریشه‌های صدم عدد ۲ برابر است با: 

① $\sqrt[100]{2}$

② $\sqrt[210]{2}$


③ $\sqrt{0,02}$


④ صفر




مغوشانند




۲۹۳. حاصل کدام یک از اعداد زیر، تعریف نشده است؟ 

$0^{\frac{1}{2}}$ 

$(-625)^{\frac{1}{2}}$ 

$(-216)^{\frac{2}{3}}$ 

$16^{-\frac{1}{2}}$ 

مفوشانند



(مسابقات جهانی ریاضی)

۲۰۰۴ (۵)

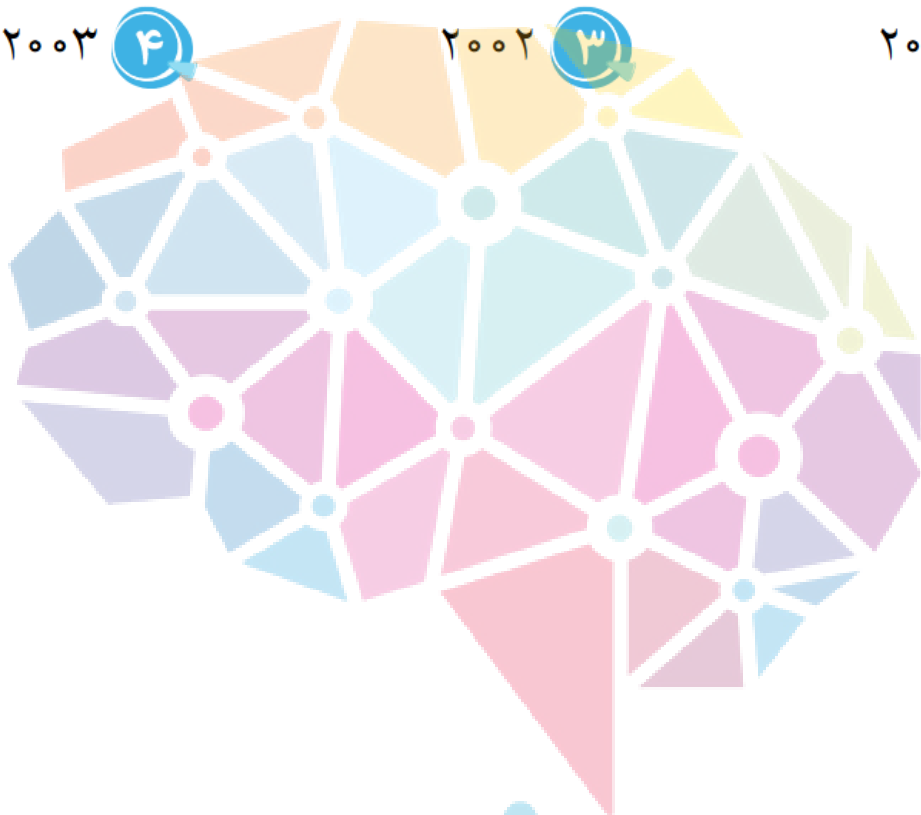
۲۹۸. مقدار عبارت $\sqrt{1+2000}\sqrt{1+2001}\sqrt{1+2002}\sqrt{1+2003}\times 2005$ برابر است با:

۲۰۰۳ (۴)

۲۰۰۲ (۳)

۲۰۰۱ (۲)

۲۰۰۰ (۱)



مغز شنند



استاد وحید اسدی کیا



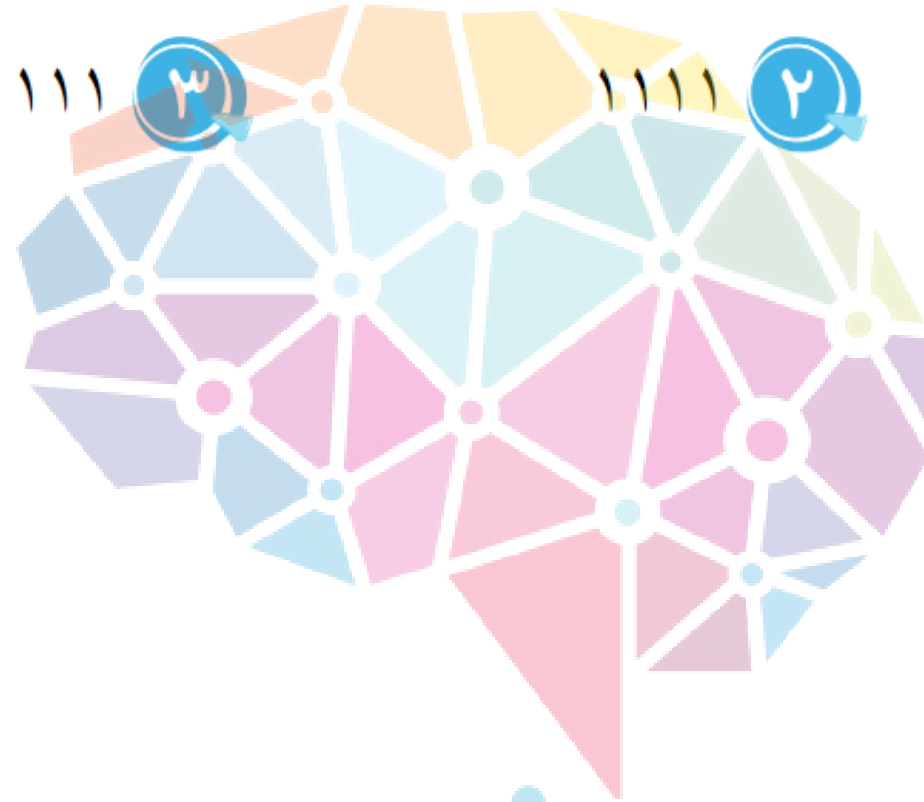
۲۹۹. جذر عدد ۱۲۳۴۵۴۳۲۱ برابر است با:

۱۲۳۴۵ (۱)

۱۱۱۱۱ (۲)

۱۱۱۱۱ (۳)

۵۴۳۲۱ (۴)



مغوششاند



استاد وحید اسدی کیا



کدام است؟ $\sqrt{4^4(-4)^{-4}}$

۳۰۰. حاصل ✉

$4^4(-2)^{-4}$



$2^4(-4)^{-4}$



$4^4(-4)^{-2}$



$4^2(-4)^{-4}$



مفوشانند



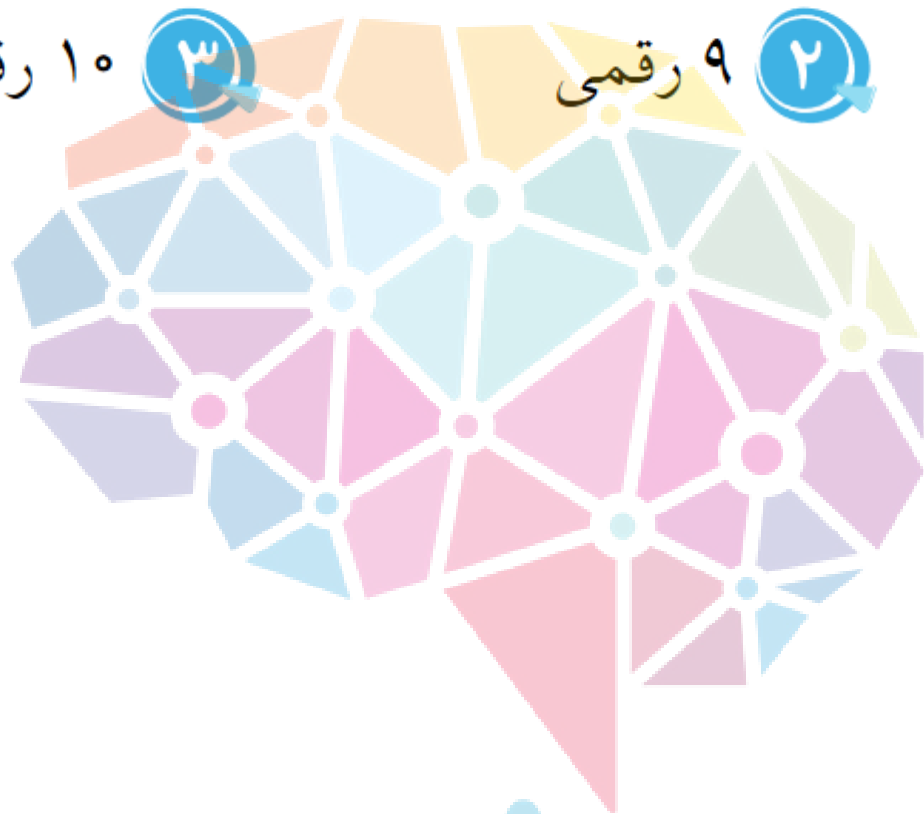
۳۰۸. جذر یک عدد ۱۷ رقمی، چند رقمی است؟

۱) ۵ رقمی

۲) ۹ رقمی

۳) ۱۰ رقمی

۴) ۴ رقمی



مفوشانند



مقایسه‌ی اعدادِ رادیکالی



مفوشانند



استاد وحید اسدی‌کیا





مفروضات



استاد وحید اسدی کیا



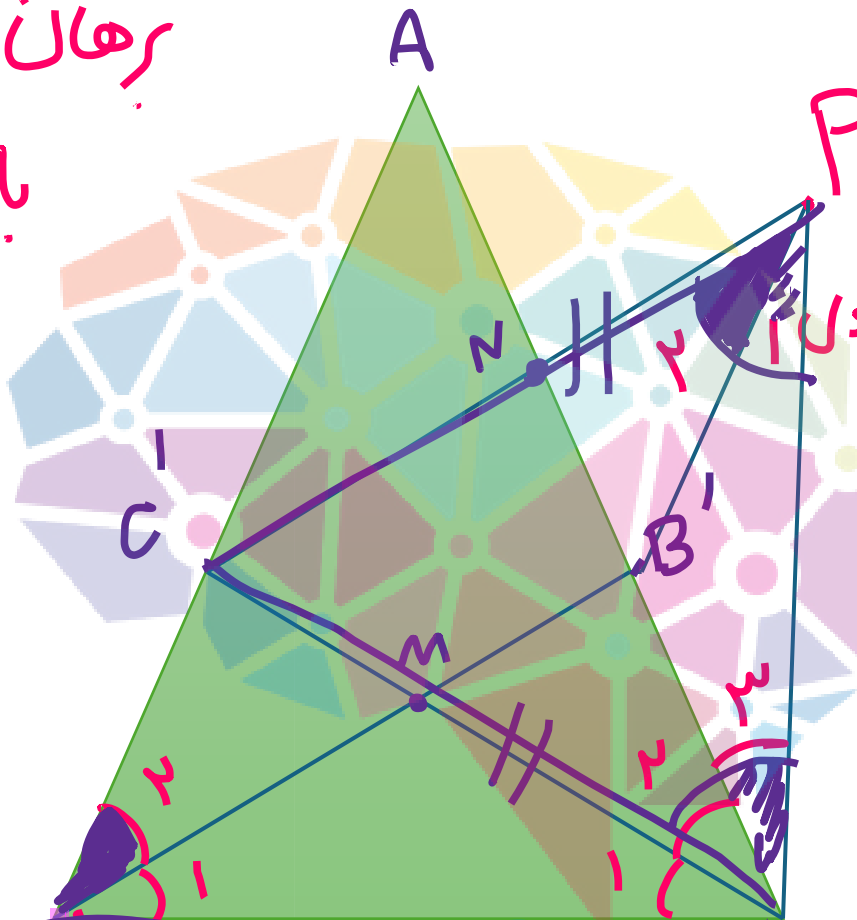
برهان خلف : فرض کنیم دو متمایز

با یکدیگر برابرند و $AB \neq AC$

$$\overline{CC'} = \overline{BB'}$$

$$\hat{C}_1 = \hat{C}_2$$

$$\hat{B}_1 = \hat{B}_2$$



$$\overline{AC} > \overline{AB}$$

$$\hat{B} > \hat{C} \Rightarrow \overline{BB'} > \overline{CC'}$$

BB' و CC' موازی و مساوی

BB' و CC' موازی و مساوی

مساوی و موازی

$$\hat{C}'P_C = \hat{P}_C C' C \Rightarrow \overline{P_B} > \overline{C_B}$$

$$\hat{P}_1 + \hat{P}_2 = \hat{C}_2 + \hat{C}_3 \Rightarrow \hat{C}_3 > \hat{P}_1 \Rightarrow \overline{P_B} > \overline{C_B}$$

$$\overline{P_B} > \overline{C_B} \Rightarrow \overline{P_B} > \overline{C_B}$$



(مسابقات جوانی ریاضی)

۲۵۱. اگر x و y اعداد صحیح باشند که $2^{x+1} + 2^x = 3^{y+2} - 3^y$ آن گاه مقدار x کدام است؟

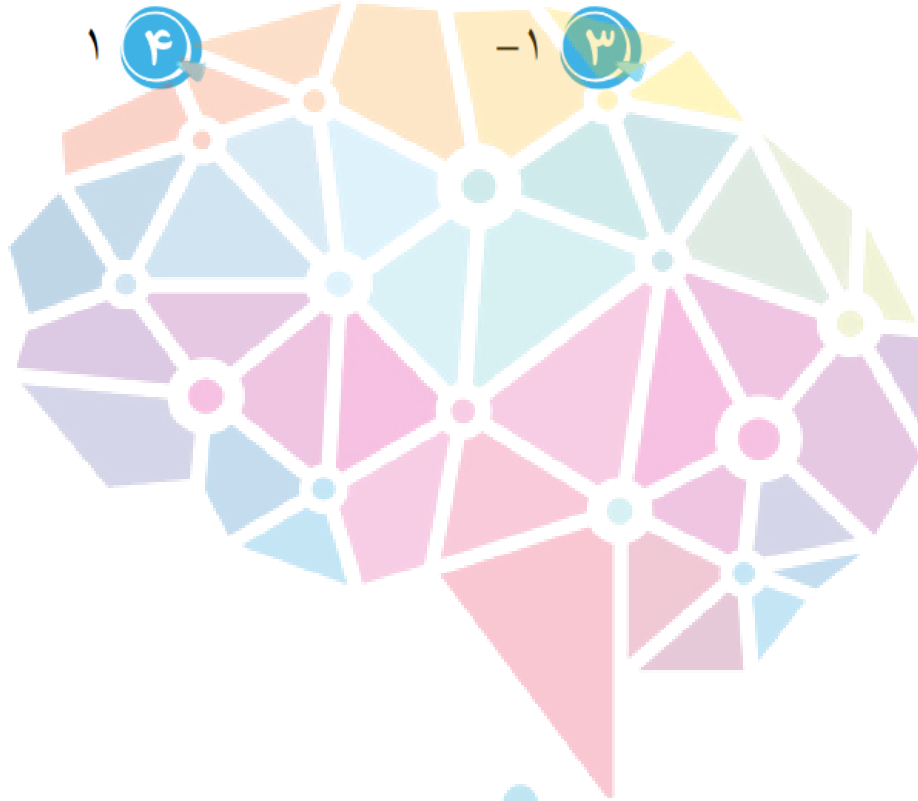
۲ (۵)

۱ (۴)

-۱ (۳)

۳ (۲)

۰ (۱)



مفوشانند



استاد وحید اسدی کیا



$$||| = |$$

$$| \underbrace{(-\delta)}_{+\delta} | = | \delta | = 0$$

$$| \sqrt{a} | = -a$$
$$| a | = -a$$

$$| \cdot | = 0$$

1. $a \leq 0$
 $a \geq 0$
 $a \in \mathbb{R}$
محدود

$$| a | = -a$$
$$\cdot = | \cdot | = - \cdot = \cdot$$

$$- \cdot = + \cdot = 0$$



$$\frac{(\sqrt{2} + \alpha)}{\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}$$

$$(\sqrt{2} + \sqrt{3})$$

$$\sqrt{2} + \sqrt{3}$$

$$\sqrt{2} + \alpha$$

$$\sqrt{2} + \sqrt{3}$$

$\in \mathbb{Q}$

$$\sqrt{2} + \sqrt{3}$$

$$m = 1$$

$$\sqrt{2} = \sqrt{2 \times 1} = \sqrt{2}$$

$$\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$$

$$m = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{3}}{\sqrt{2} + 1}$$

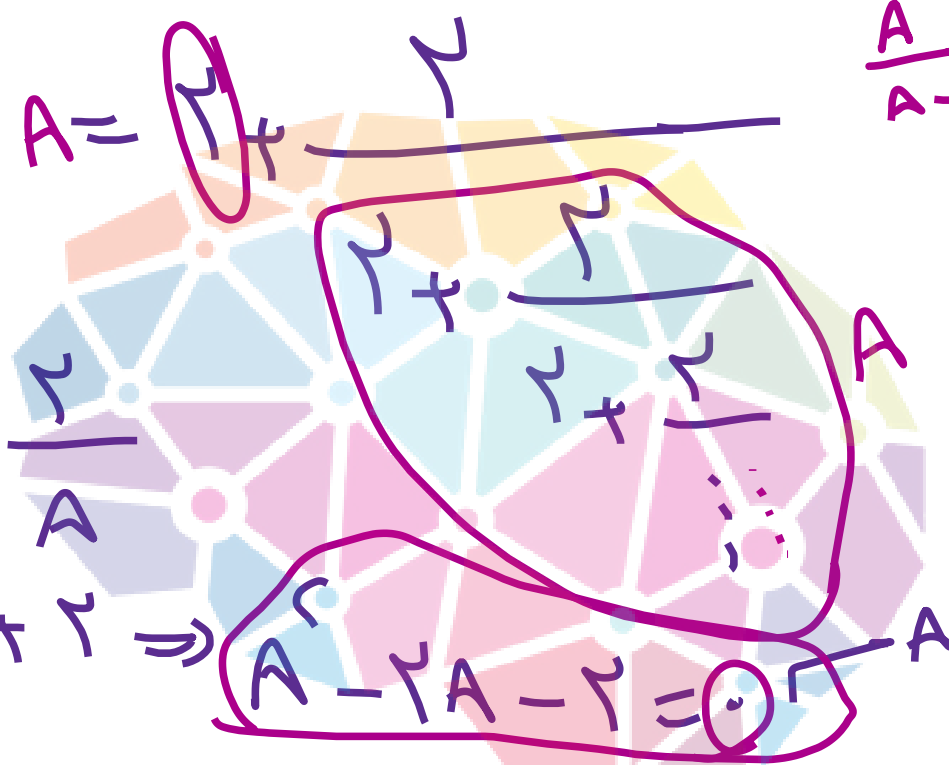


$$\frac{A^2 - \gamma A - \gamma A}{A(\gamma A + \gamma)}$$

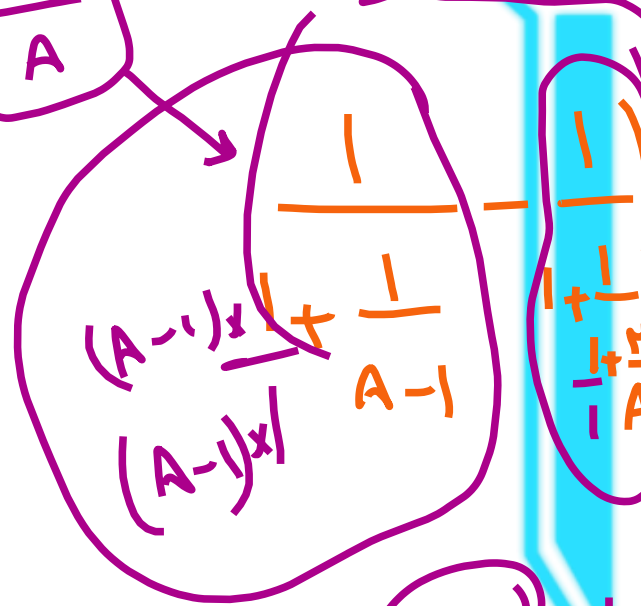
$$\frac{A^2 - \gamma A - \gamma A}{A(\gamma A + \gamma)} = 0$$

$$A = \gamma + \gamma$$

$$A^2 = \gamma A + \gamma A$$



$$\frac{1}{\frac{A}{A-1}} = \frac{A-1}{A}$$



$$A^2 - \gamma A - \gamma A = 0$$

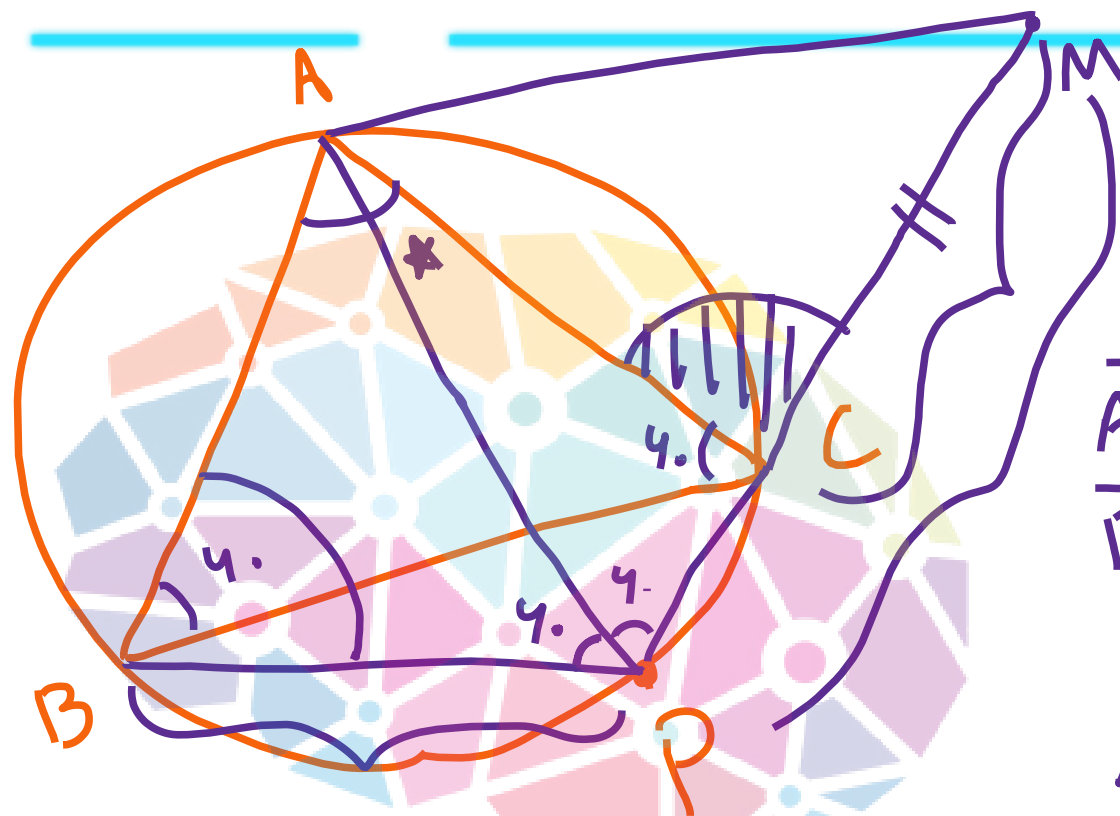
$$\Delta = b^2 - 4ac = \gamma^2 - 4 \times 1 \times -\gamma$$

$$\frac{1}{\frac{\gamma A + \gamma}{A + \gamma}}$$

$$\frac{A + \gamma}{\gamma A + \gamma} \quad \Sigma + \Lambda = 1\gamma$$

$$\frac{A-1}{A} - \frac{A+\gamma}{\gamma A + \gamma} = \frac{\gamma A^2 + \gamma A}{\gamma A + \gamma}$$





PC را از طول C به اندازن
BP ارا به می دهیم

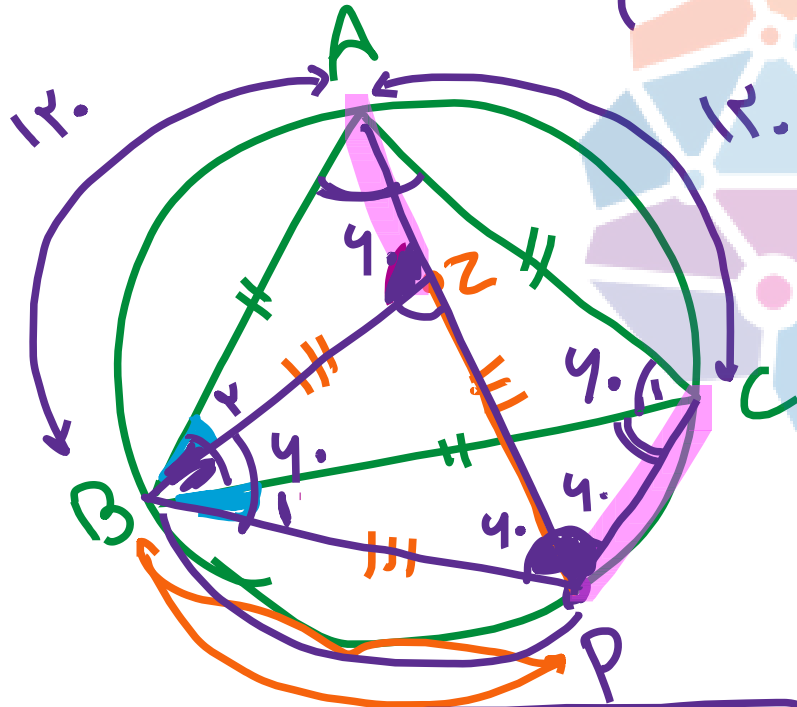
$$\begin{aligned} \overline{AC} &= \overline{AB} \\ \overline{BP} &= \overline{CM} \\ \hat{A}BP &= \hat{A}CM \end{aligned} \Rightarrow$$

$$\triangle ABP \cong \triangle ACM \Rightarrow \hat{CMA} = 40^\circ$$

من زنی

مفوشاند





افق
 $\overline{PB} + \overline{PC} = \overline{PA}$

$$\overline{PA} = \overline{PZ} + \overline{AZ}$$

$$\overline{PA} = \overline{BP} + \overline{PC}$$

$$\overline{PZ} = \overline{PB} \Rightarrow$$

$$\overline{AZ} = \overline{PC}$$

$\Delta PCB \cong \Delta AZB \Rightarrow$ صاف

$$\hat{BAP} = \hat{BCP} = \hat{BPZ}$$

$$\hat{BPC} = \hat{AZB} = 120^\circ$$

زیرا ΔBZP مساوی ΔBZP میں
 $\overline{PB} = \overline{BZ}$
 $\overline{AB} = \overline{BC}$ فرض
 $\hat{B}_1 = \hat{B}_c$

صاف



چرا $\sqrt{2}$ گویا نیست؟

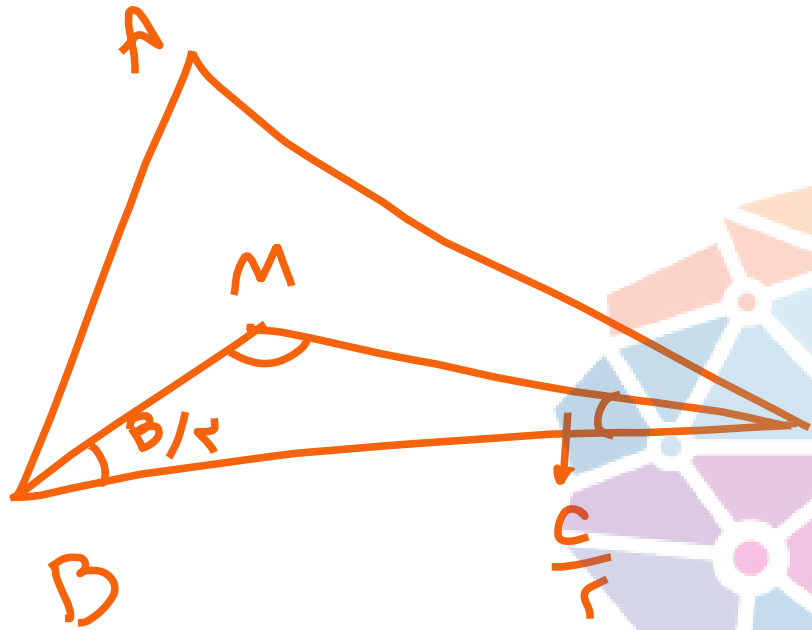


مخوشانند



استاد وحید اسدی کیا



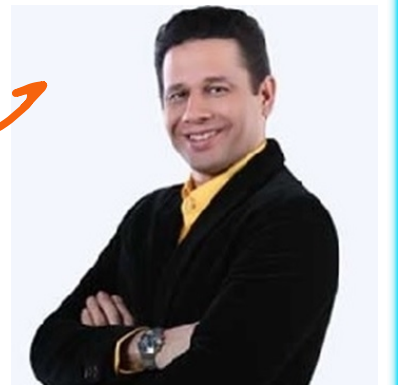


$$\Rightarrow \frac{A}{r} + \frac{B+C}{r} = \frac{180}{r} = 9.$$

$$\frac{B}{r} + \frac{C}{r} = 9 - \frac{A}{r}$$

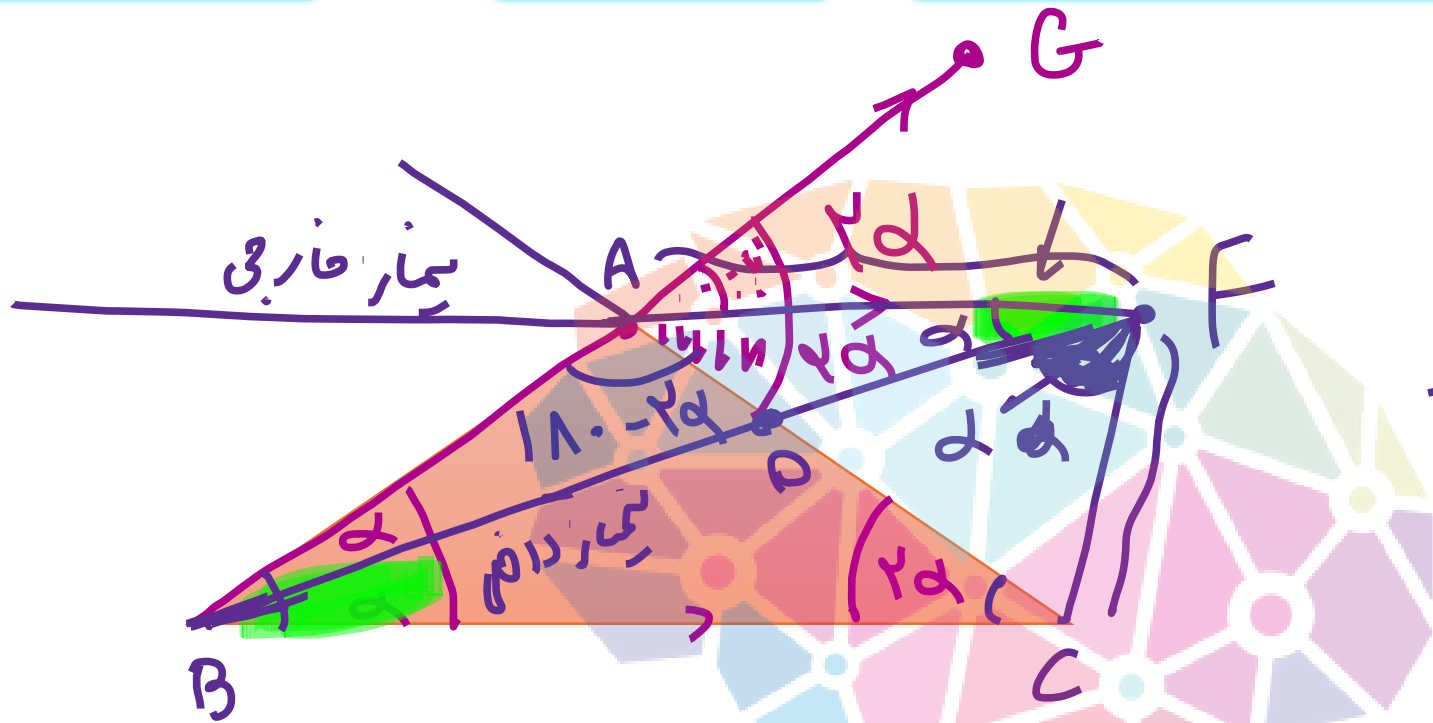
$$M + \frac{B}{r} + \frac{C}{r} = 180 \Rightarrow M + 9 - \frac{A}{r} = 180$$

$$M = 180 - 9 + \frac{A}{r}$$



استاد وحید اسدی کیا





$$AF = BC$$

$$\begin{aligned} AF &= AC \\ AF &= AB \end{aligned}$$

درست است

$$\Rightarrow \hat{C}BF = \hat{BFA} \Rightarrow \overline{AF} = \overline{AB} \text{ و } \overline{AB} = \overline{AC}$$

