

۱- حاصل کسر مقابل در کدام گزینه آمده است؟

$$\frac{3a+2 - 3a+1 - 3a}{2a + 2a + 2a + 2a + 2a}$$

$$\frac{3a+1}{3a-1} \quad (2)$$

$$1 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^a \quad (1)$$

$$\frac{5 \times 2a}{25 \times 3a+2} \quad (3)$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{a-x} \quad (4)$$

۲- حاصل عبارت مقابل کدام است؟

$$\frac{\left(\frac{ab}{c^2}\right)^{-3}}{(ab^2c^3) \div \left(\frac{1}{a^2c}\right)^{-2}}$$

$$\frac{c^4}{b^5} \quad (2)$$

$$\frac{c^3}{a^3b^5} \quad (1)$$

$$\left(\frac{c}{b}\right)^5 \quad (4)$$

$$\frac{b^3}{a^4c^2} \quad (3)$$

۳- همهٔ عددهای صحیح و مثبت را می‌توان به صورت مجموع چند عدد توان‌دار متمایز با پایهٔ ۲

نشان داد؛ مانند $77 = 2^0 + 2^2 + 2^3 + 2^6$. توجه کنید که عددهای ۱ و ۲ نیز توانی از ۲

محسوب می‌شوند. چند عدد سه‌رقمی می‌توان نوشت که آن عدد، حاصل جمع ۹ عدد متمایز توان‌دار با پایهٔ ۲ باشد؟

$$10 \quad (4)$$

$$5 \quad (3)$$

$$2 \quad (2)$$

$$3 \quad (1)$$

۴- اگر عدد $\overline{aabb}$ مربع کامل باشد، مقدار $a+b$ چند است؟

$$11 \quad (4)$$

$$10 \quad (3)$$

$$6 \quad (2)$$

$$5 \quad (1)$$

۵- ساده‌شدهٔ عبارت $\frac{1}{7+4\sqrt{3}} + (2+\sqrt{3})^2$ کدام است؟

$$7 \quad (2)$$

$$6\sqrt{3} \quad (1)$$

۶- اگر $x^2 + y^2 = 3$ و $xy = \sqrt{2}$ ، حاصل $x-y$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{2}+1$ (۲) $2-\sqrt{2}$ (۳) $2+\sqrt{2}$ (۴) $\sqrt{2}-1$

۷- حاصل عبارت $\sqrt{2-\sqrt{3}} + \sqrt{2+\sqrt{3}}$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{6} + \sqrt{2}$ (۲) $\sqrt{6} - \sqrt{2}$ (۳) ۵ (۴) $\sqrt{6}$

۸- در تجزیه عبارت $x^4 - 3x^3 + 8x - 24$ کدام عامل ضرب وجود دارد؟

- (۱) $x-4$ (۲) $x-2$ (۳) $x+2$ (۴) $x+3$

۹- در صورتی که $x^2 + xy + y^2 = 4$ و $x^4 + x^2 y^2 + y^4 = 8$ ، حاصل $x^6 + x^3 y^3 + y^6$ کدام است؟

- (۱) ۱۷ (۲) ۱۸ (۳) ۱۹ (۴) ۲۰

۱۰- مجموعه جواب دستگاه نامعادلات مقابل کدام است؟

- (۱) $x < 3$ (۲) $x < 1$ (۳) $0 < x < 1$ (۴) $1 < x < 2$
- $$\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{x}{3} < \frac{5}{6} \\ \frac{x}{2} - \frac{x}{3} < \frac{1}{2} \end{cases}$$

۱۱- مختصات نقطه‌ای از خط $3x + 2y = 5$ که از دو نقطه $A = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ به یک فاصله باشد، کدام است؟

- (۱) $\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} 2/5 \\ 1 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

۱۲- مختصات نقطه‌ای از خط $y=4x-4$ که طول و عرض آن قرینه و عکس یکدیگر باشند، کدام است؟

$$\begin{matrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} (1) & \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} (2) & \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} (3) & \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} (4) \end{matrix}$$

۱۳- معادله خطی که از نقاط $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 1 \\ a \end{bmatrix}$ می‌گذرد، کدام است؟

$$\begin{matrix} y=x+b(1) & y=ax+b(2) & x=1(3) & y=b(4) \end{matrix}$$

۱۴- به ازای کدام مقدار m ، دستگاه معادلات مقابل، بی‌شمار جواب دارد؟

$$\begin{cases} 3x+my=3 \\ mx+y=\sqrt{3} \end{cases} \quad \begin{matrix} -2(1) & -\sqrt{3}(2) & 1(4) & \sqrt{3}(3) \end{matrix}$$

۱۵- خطوط با معادله $y-ax+2a-1=0$ به ازای همه مقادیر a از کدام نقطه می‌گذرد؟

$$\begin{matrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} (1) & \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} (2) & \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix} (3) & \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} (4) \end{matrix}$$

فوتوشاپ

۱) گزینه ۱

$$\frac{3a(3^2-3-1)}{2a(1+1+1+1+1)} = \left(\frac{3}{2}\right)^5$$

۲) گزینه ۴

$$\frac{\left(\frac{c^2}{ab}\right)^3}{(ab^2c^3) \div (a^2c^2)} = \frac{\frac{c^6}{a^3b^3}}{ab^2c^3 \div a^2c^2} = \frac{\frac{c^6}{a^3b^3}}{ab^2c^3 \times \frac{1}{a^2c^2}} = \frac{c^6a^4c^2}{ab^2c^3a^3b^3} = \left(\frac{c}{b}\right)^5$$

۳) گزینه ۳

کوچکترین عدد سه رقمی با مجموع ۹ توان متمایز از ۲ برابر است با:

$$2^8 + 2^7 + 2^6 + \dots + 2^1 + 2^0 = 512 - 1 = 511$$

با توجه به نحوه محاسبه عبارت بالا حاصل عبارت $2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^9$ برابر است با

$$1023 = 511 + 512 \text{ که اگر } 2^5 \text{ را از میان آنها حذف کنیم تعداد آنها برابر ۹ و حاصل برابر ۹۹۱}$$

میشود که بزرگترین مقدار سه رقمی با شرایط گفته شده در سؤال است. میخواهیم به این نتیجه

برسید که تفاوت کوچک ترین مقدار و بزرگترین مقدار این است که 2^9 را جایگزین 2^5 کرده ایم

با اندکی دقت متوجه می شوید که 2^9 می تواند جایگزین 2^6 ، 2^7 و 2^8 نیز شود که در واقع سه مقدار دیگر ایجاد میشود؛ پس با احتساب ۵۱۱ و ۹۹۱ پنج عدد سه رقمی متفاوت به دست می آید.

۴) گزینه ۲

عدد $aabb$ را به صورت گسترده مینویسیم:

$$1000a + 100a + 10b + b = 1100a + 11b = 11(100a + b)$$

یکان عددی که مربع کامل است نمیتواند عددهای ۲، ۳، ۷ و ۸ باشد؛ بنابراین عدد، عضو

مجموعه مقابل است: $\{ ۹ و ۶ و ۵ و ۴ و ۱ و ۰ \}$

با جای گذاری مقادیر مختلف برای a و b در عبارت $100a + b$ ، داریم:

$$a=4, b=1 \Rightarrow a+b=5$$

$$aabb=7744$$

(۵) گزینه ۳

ابتدا کسر را گویا میکنیم سپس حاصل را به دست می آوریم

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{7+4\sqrt{3}} \times \frac{7-4\sqrt{3}}{7-4\sqrt{3}} &= \frac{7-4\sqrt{3}}{49-10 \times 3} = \frac{7-4\sqrt{3}}{49-48} = 7-4\sqrt{3} \\ (2+\sqrt{3})^2 &= 4+3+4\sqrt{3} \end{aligned} \right\} \rightarrow$$

(۶) گزینه ۴

$$\left. \begin{aligned} A &= x - y \rightarrow A^2 = x^2 + y^2 - 2xy \\ x^2 + y^2 &= 3 \\ x_y &= \sqrt{2} \end{aligned} \right\}$$

$$A^2 = 3 - 2\sqrt{2} = 2 + 1 - 2\sqrt{2} = (\sqrt{2} - 1)^2 \rightarrow A = \sqrt{2} - 1$$

$$x = \sqrt{2 - \sqrt{3}} + \sqrt{2 + \sqrt{3}}$$

(۷) گزینه ۴

$$x^2 = \left(\sqrt{2 - \sqrt{3}} + \sqrt{2 + \sqrt{3}} \right)^2 \rightarrow$$

$$x^2 = 2 - \sqrt{3} + 2 + \sqrt{3} + 2\sqrt{(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})}$$

$$\rightarrow x^2 = 4 + 2\sqrt{4 - 3} \rightarrow x^2 = 6 \rightarrow \begin{cases} x = -\sqrt{6} & \text{غ ق ق} \\ x = \sqrt{6} & \text{ق ق} \end{cases}$$

$$x^4 - 3x^3 + 8x - 24 = x^3(x-3) + 8(x-3) = (x-3)(x^3 + 8) = (x-3)(x+2)(x^2 - 2x + 4)$$

$$x^4 + x^2y^2 + y^4 = (x^4 + 2x^2y^2 + y^4) - x^2y^2 = (x^2 + y^2 + xy)(x^2 + y^2 - xy)$$

$$\Rightarrow 8 = 4(x^2 + y^2 - xy) \Rightarrow x^2 - xy + y^2 = 2$$

$$(x^2 + xy + y^2) + (x^2 - xy + y^2) = 4 + 2 \Rightarrow 2(x^2 + y^2) = 6$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = 3$$

$$x^2 - xy + y^2 = 2 \xrightarrow{x^2 + y^2 = 3} xy = 1$$

$$x^6 + y^6 = (x^2)^3 + (y^2)^3 = (x^2 + y^2)^3 - 3x^2y^2(x^2 + y^2) = 3^3 - 3(1)^2(3) = 18$$

$$x^6 + x^3y^3 + y^6 = 18 + 1 = 19$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{x}{2} + \frac{x}{3} < \frac{5}{6} \xrightarrow{\times 6} 3x + 2x < 5 \Rightarrow 5x < 5 \Rightarrow x < 1 \\ \frac{x}{2} - \frac{x}{3} < \frac{1}{2} \xrightarrow{\times 6} 3x - 2x < 3 \Rightarrow x < 3 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \cap \\ x < 1 \end{array}$$

نقطه ای که از دو نقطه A و B به یک فاصله باشد، باید روی عمود منصف خط واصل دو نقطه A و B باشد؛ پس:

۱=شیب عمود منصف ۱- = شیب خط واصل A و B

$$AB \text{ نقطه وسط خط} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

بنابراین معادله عمود منصف دو نقطه A و B برابر است با:

$$y - 2 = 1(x - 2) \Rightarrow y = x$$

فقط نقطه $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ روی خط $y = x$ قرار دارد و در و در معادله $3x - 2y = 5$ نیز صدق میکند.

روش اول مورد نظر را $\left[y = \frac{-1}{x} \right]$ در نظر میگیریم؛ بنابراین:

$$y = 4x - 4 \xrightarrow{y = \frac{-1}{x}} \frac{-1}{x} = 4x - 4 \Rightarrow 4x + \frac{1}{x} = 4 \Rightarrow$$

$$\frac{4x^2 + 1}{x} = 4 \Rightarrow 4x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow (2x - 1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = -2 \Rightarrow \text{مختصات نقطه} = \begin{bmatrix} x \\ \frac{-1}{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -2 \end{bmatrix}$$

روش دوم طول و عرض نقاط همه گزینه ها عکس یکدیگرند؛ اما فقط نقطه گزینه ۴ در معادله صدق میکند:

$$4 \times \frac{1}{2} - 4 = -2 = 2 - 4 \Rightarrow -2 = -2$$

(۱۳) گزینه ۳

(۱۴) گزینه ۳

$$\frac{3}{m} = \frac{m}{1} = \frac{3}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{3}{m} = \frac{3}{\sqrt{3}} \Rightarrow m = \sqrt{3}$$

$$m = \sqrt{3} \Rightarrow \frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \Rightarrow m = \sqrt{3} \text{ قابل قبول است}$$

(۱۵) گزینه ۴

$$\begin{cases} a = 0 \Rightarrow y - 0 \times x + 2 \times 0 - 1 = 0 \Rightarrow y = 1 \\ a = 1 \Rightarrow y - 1 \times x + 2 \times 1 - 1 = 0 \Rightarrow y - x = -1 \end{cases}$$

$$y - x = -1 \xrightarrow{y=1} 1 - x = -1 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow \text{از نقطه } \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ می گذرد}$$

$$y - ax + 2a - 1 = 0 \Rightarrow y - 1 = a(x - 2)$$

این خط با شیب متغیر a همواره از نقطه $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ می گذرد