

فصل ۱: مجموعه ها و احتمال

فصل ۲: اعداد حقیقی

فصل ۳: هندسه

فصل ۴: توان و ریشه

فصل ۵: جبر و اتحادهای جبری

فصل ۶: معادله خط

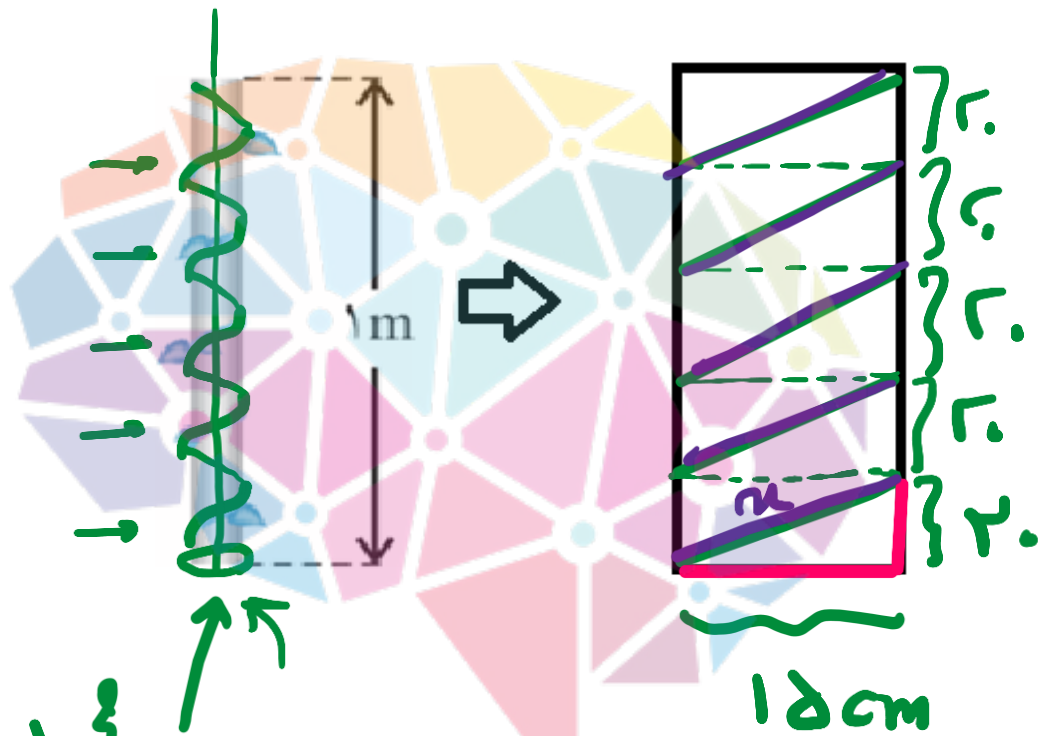
فصل ۷: عبارتهای گویای جبری

فصل ۸: حجم



در شکل، گیاهی درست پنج دور، با شیب ثابت دور میله‌ای به ارتفاع ۱ m و محیط ۱۵ cm پیچیده است. طول ساقه‌ی گیاه چه قدر است؟

۱. ۰/۷۵ متر
۲. ۱ متر
۳. ۱/۲۵ متر
۴. ۱/۵ متر
۵. ۱/۷۵ متر



$$5 \times 25 = 125$$

$$n^2 = 20^2 + 15^2 = 400 + 225 = 625$$

$$\sqrt{n^2} = 625 \Rightarrow n = 25$$

تقریباً: فصل ۱۰۰ cm
از آنجا که در این مسئله
مسئله از آنجا که در این مسئله
مسئله از آنجا که در این مسئله

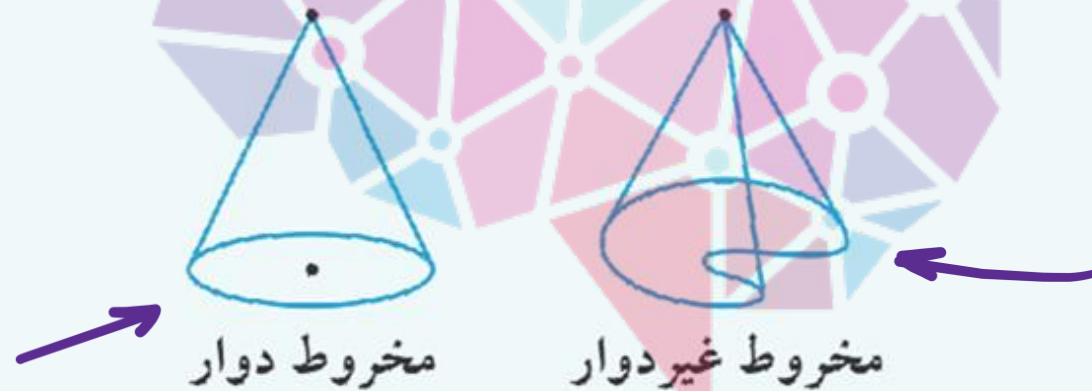




استاد وحید اسدی گیزا



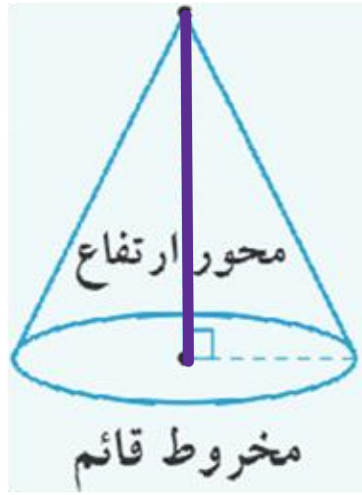
نکته اگر قاعده‌ی یک مخروط دایره باشد، به آن مخروط دوار می‌گوییم، و اگر قاعده‌ی یک مخروط، منحنی بسته (غیر از دایره) باشد، به آن مخروط غیردوار یا مخروط غیرمدور می‌گوییم:



مخروشکلند

سرزمین تیزهوشان ایران





نکته: اگر در یک مخروط، ارتفاع وارد از رأس به مرکز قاعده فرود آید، به آن مخروط قائم و در غیر این صورت به آن مخروط مایل می گویند:

توجه: در مخروط قائم، ارتفاع با محور آن برابر است.

هوشلند

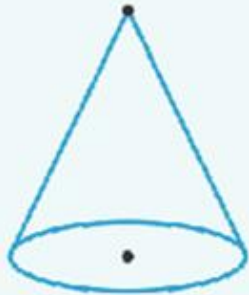
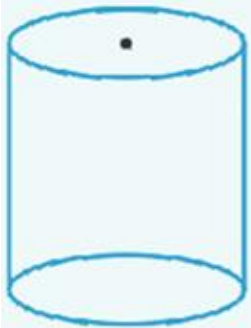
سرزمین تیزهوشان ایران



استاد وحید اسدی کیا



اصل کا والری



نکته هرگاه قاعده‌ی یک مخروط با قاعده‌ی یک استوانه و هم‌چنین ارتفاع مخروط با ارتفاع استوانه برابر باشد، در این صورت حجم مخروط، ثلث حجم استوانه می‌باشد:

$$\Rightarrow V_{\text{مخروط}} = \frac{1}{3} \times V_{\text{استوانه}}$$

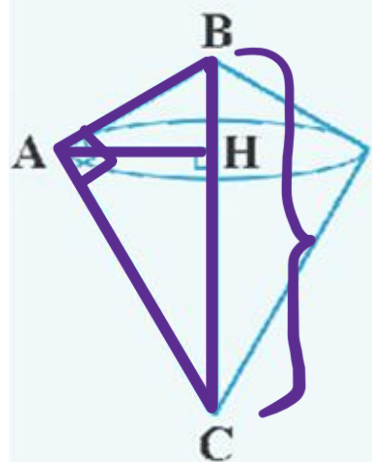
$$V = \frac{1}{3} Sh$$

مخروط

$$\text{حجم استوانه} \times \frac{1}{3} = \text{حجم مخروط}$$

سرزمین تیزهوشان ایران





نکته از دوران هر مثلث قائم الزاویه، حول وترش، دو مخروط که در قاعده مشترک

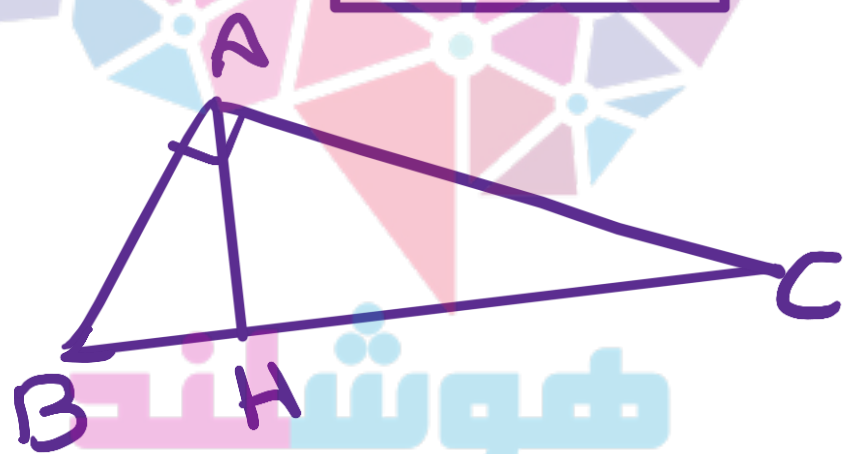
(به هم چسبیده) هستند به دست می آید (مطابق شکل). در این صورت حجم کل جسم

$$V_{\text{کل}} = \frac{1}{3} \pi \times \overline{AH}^2 \times \overline{BC}$$

به وجود آمده را می توان از رابطهی مقابل به دست آورد:

$$\overline{AH} = \frac{\overline{AB} \times \overline{AC}}{\overline{BC}}$$

که در آن شعاع قاعدهی مشترک، است.

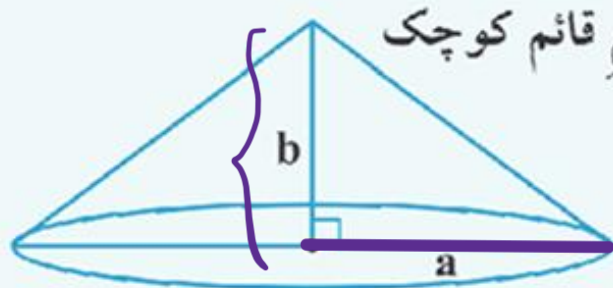


سرزمین قیزهوشان ایران



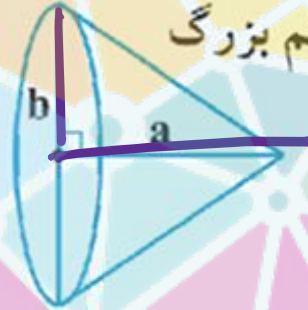
نکته نسبت حجم مخروط‌های به دست آمده از دوران یک مثلث قائم‌الزاویه حول اضلاع قائم آن (طبق

شکل) برابر است با:



شکل (۱)

دوران حول ضلع قائم کوچک



شکل (۲)

دوران حول ضلع قائم بزرگ

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{a}{b}$$

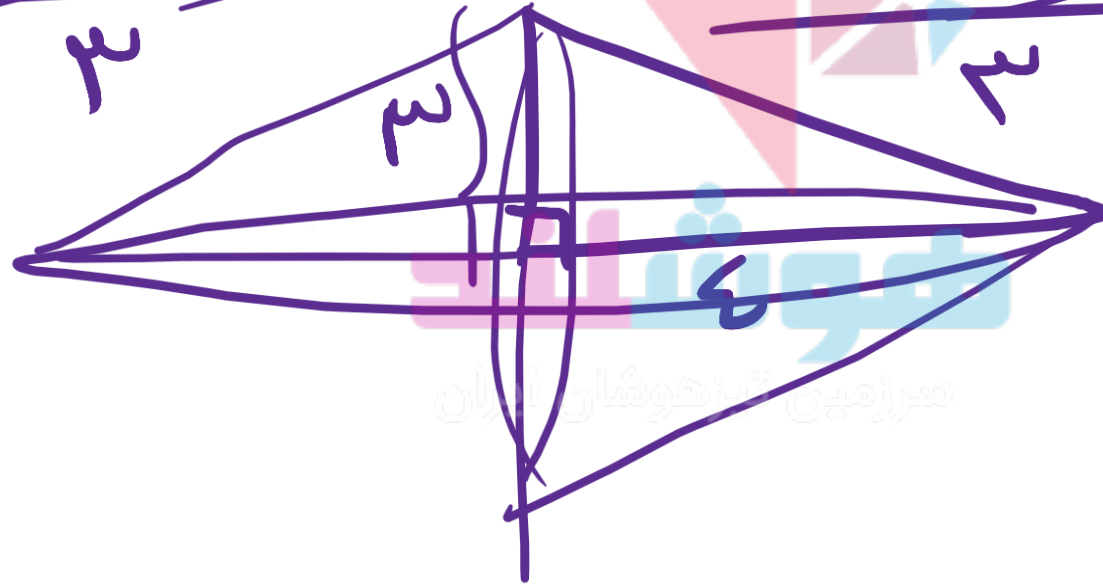
ضلع بزرگ قائم =
ضلع کوچک قائم =

$a \times a \times \pi \times b$

۳

$b \times b \times \pi \times a$

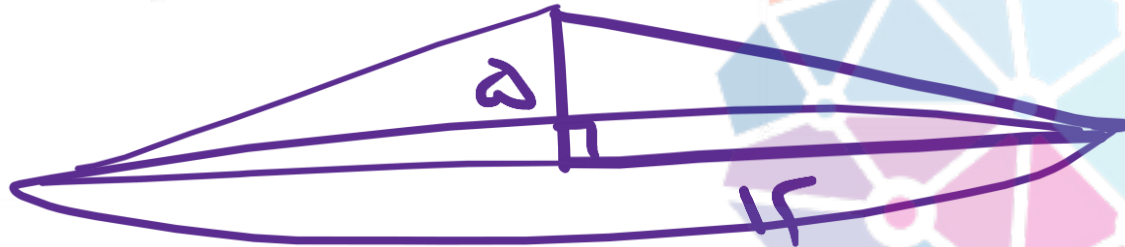
۳



$$\frac{\text{حول ۳}}{\text{حول ۴}} = \frac{۴}{۳}$$



مثلث قائم الزاویه ای به اضلاع ۵ و ۱۲ را یک بار حول ضلع به طول ۵ و یک بار حول ضلع به طول ۱۲ دوران می دهیم
نسبت حجم دو شکل به دست آمده، چه قدر است؟



$$\frac{25}{144}$$

۱

$$\frac{36}{81}$$

۲

$$\frac{12}{5}$$

۳

$$\frac{7}{15}$$

۴

هوشلند

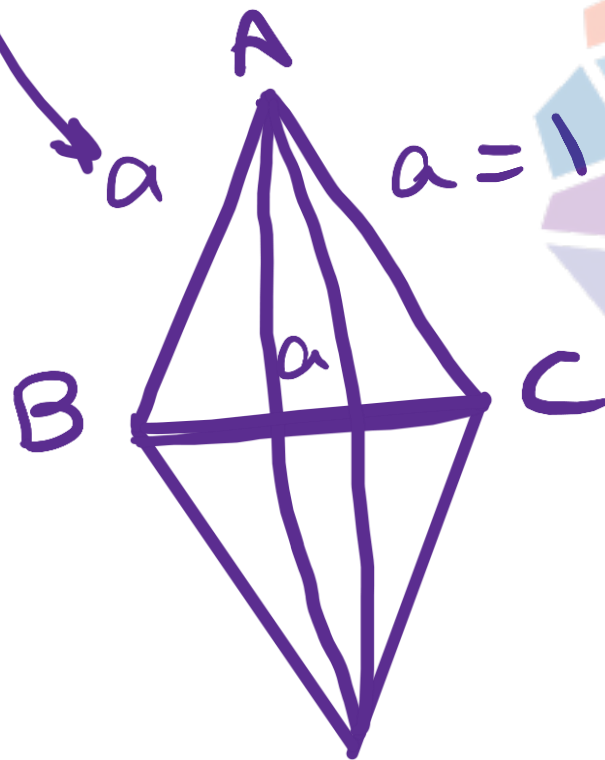
سرزمین تیزهوشان ایران



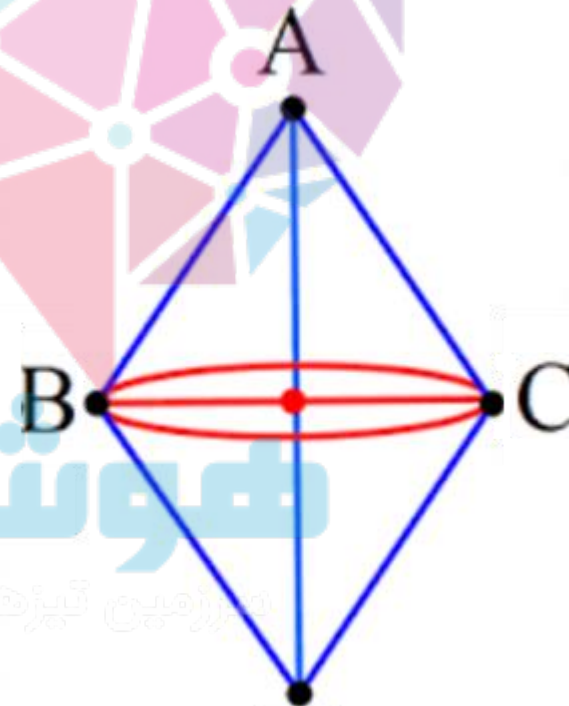
استاد وحید اسدی کیا



نکته حجم حاصل از دوران مثلث متساوی الاضلاع به ضلع a حول یک ضلع آن برابر است با: $V = \frac{\pi}{4} a^3$

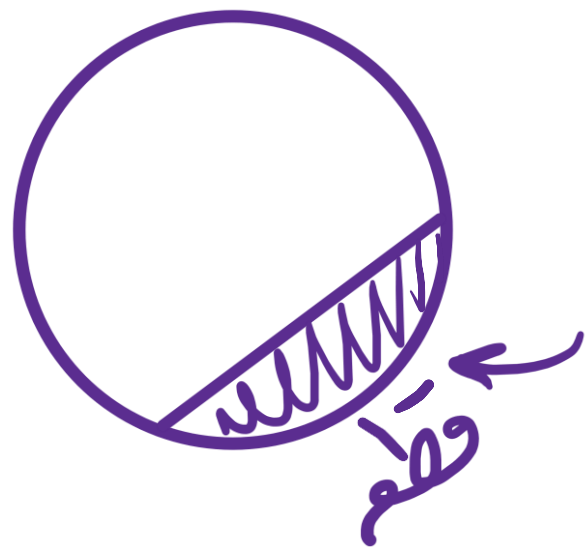


$$a = 1.0 \quad \frac{\pi}{4} \times 1.0^3 = 0.785$$

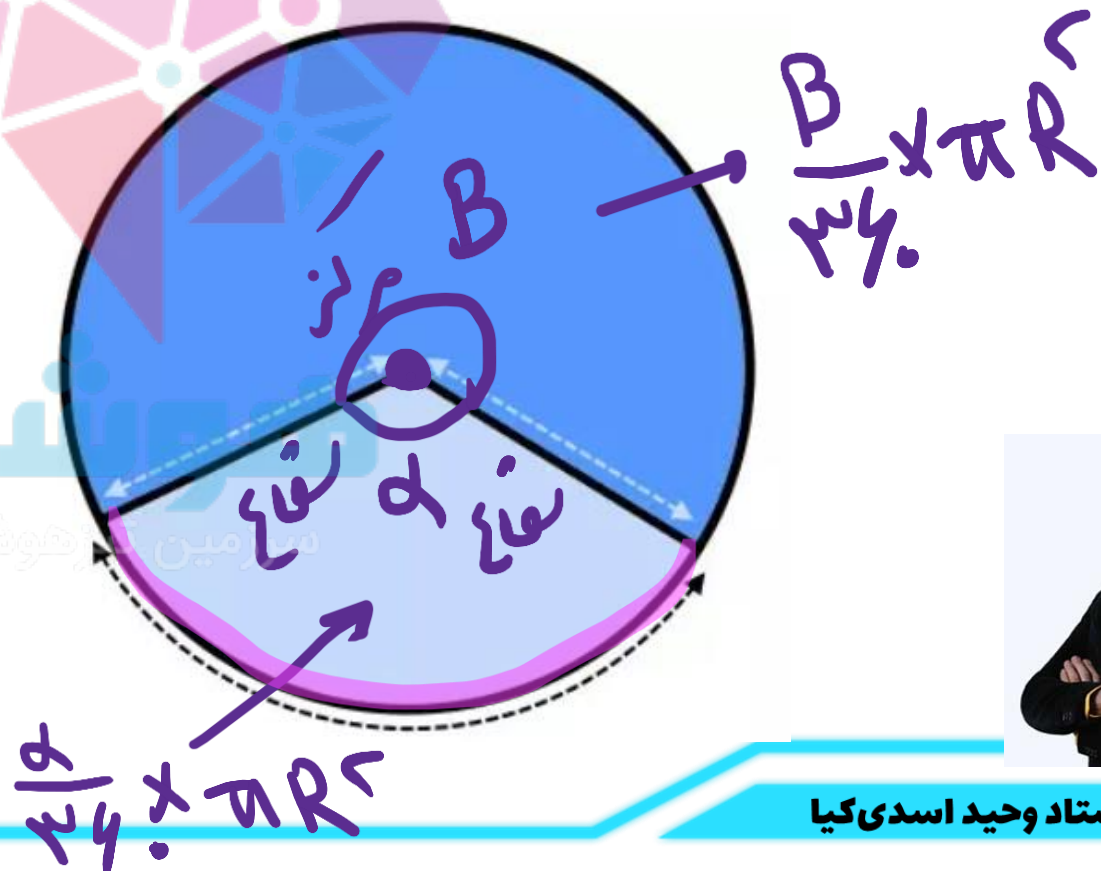


نکته مساحت قطاع هر دایره به شعاع R به زاویه‌ی α درجه برابر است با: $S = \frac{\alpha^\circ}{360^\circ} \times \pi R^2$

نکته محیط کمان قطاع هر دایره به شعاع R و زاویه‌ی α درجه برابر است با: $\frac{\alpha}{360^\circ} \times 2\pi R = \frac{\alpha}{180^\circ} \pi R$



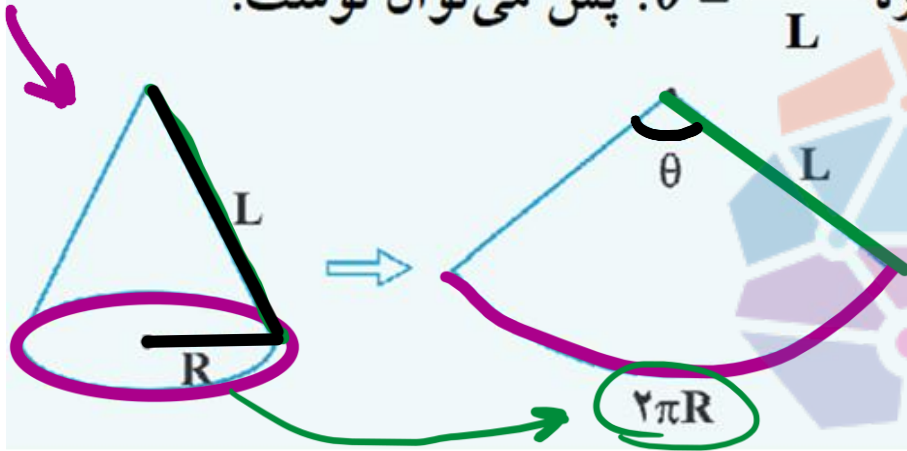
سازمان پژوهش‌های ایران





از گسترده کردن یک مخروط قائم به شعاع R و طول مولد L ، قطاع دایره‌ای به شعاع L و طول

کمانی برابر با محیط قاعده‌ی مخروط ($2\pi R$) حاصل می‌شود که همواره $\theta = \frac{2\pi R}{L}$. پس می‌توان نوشت:



$$2\pi R = \frac{\theta}{360} \times 2\pi L \Rightarrow \frac{R}{L} = \frac{\theta}{360}$$

پس می‌توان نتیجه‌گیری کرد:

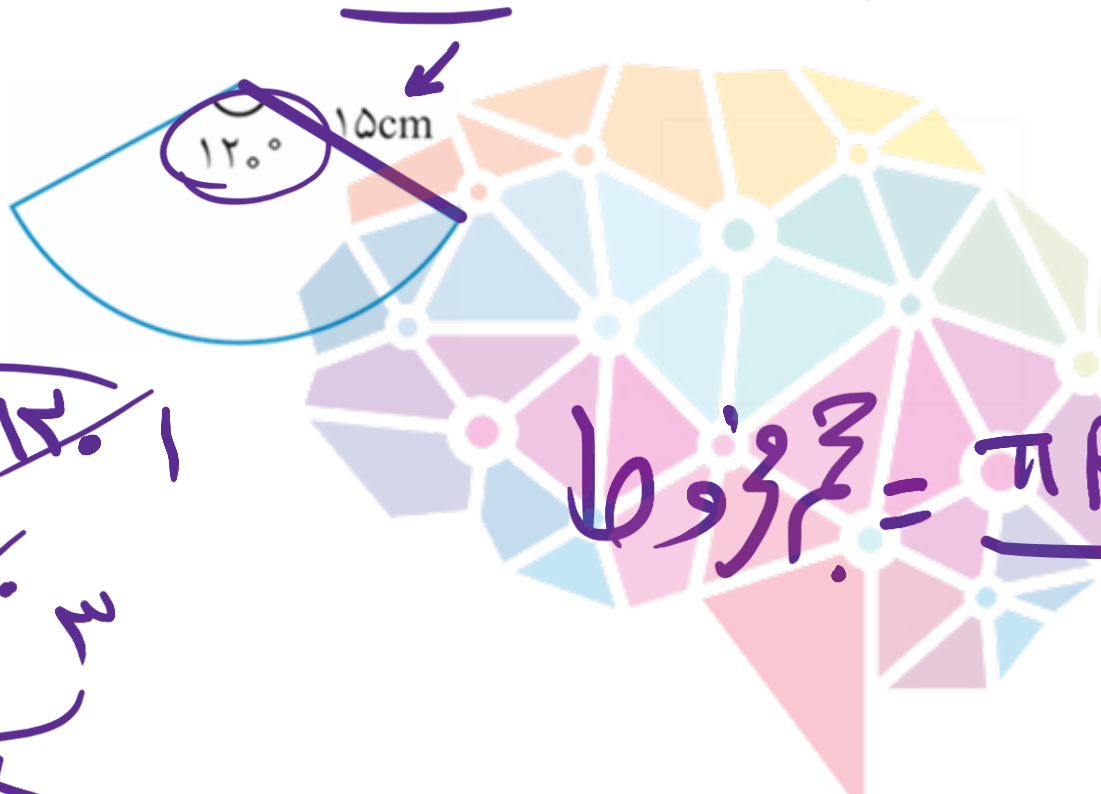
مغوشلند
سرزمین تیزهوشان ایران



استاد وحید اسدی‌کیا



حجم مخروطی که اگر سطح جانبی آن را باز کنیم، قطاعی 120° به شعاع ۱۵ سانتی متر به دست می آید، چند سانتی متر مکعب است؟



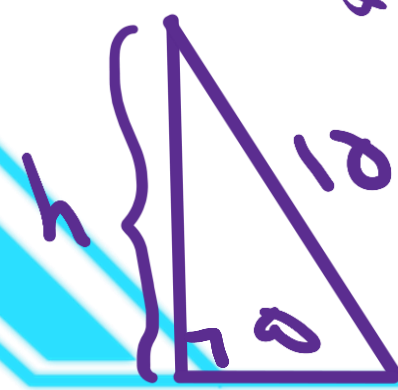
- ۱) $\frac{250\sqrt{3}}{2} \pi$
- ۲) $\frac{150\sqrt{3}}{2} \pi$
- ۳) $\frac{150\sqrt{2}}{3} \pi$
- ۴) $\frac{250\sqrt{2}}{3} \pi$

$$\frac{R}{L} = \frac{\theta}{360} \quad 1$$

$$\frac{R}{15} = \frac{120}{360} \quad 2$$

$$R = 5$$

$$\text{حجم مخروط} = \frac{\pi R^2 \times h}{3} = \frac{\pi \times 5^2 \times 10\sqrt{3}}{3}$$



$$15^2 = 5^2 + h^2 \Rightarrow h = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$$



استاد وحید اسدی کیا



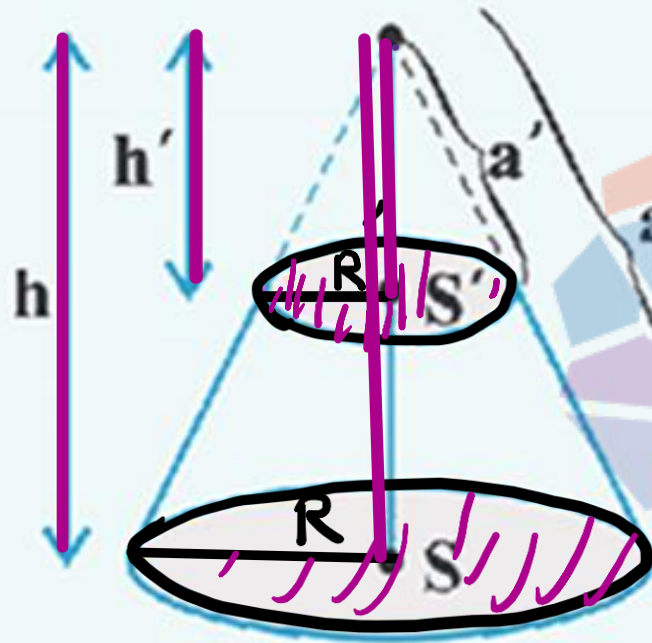
در هر مخروط داریم:

رابطه‌ی (۱)

$$\frac{a'}{a} = \frac{h'}{h} = \frac{R'}{R}$$

رابطه‌ی (۲)

$$\frac{S'}{S} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2 = \left(\frac{a'}{a}\right)^2 = \left(\frac{R'}{R}\right)^2$$



هوش‌شوند

سرزمین تیزهوشان ایران

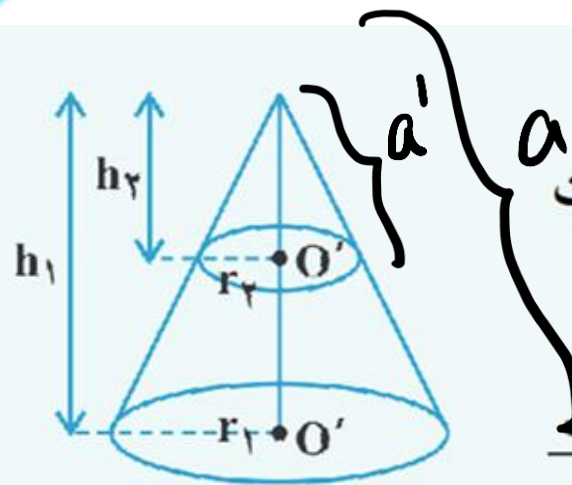


استاد وحید اسدی‌کیا



نکته

اگر به موازات قاعده‌ی مخروطی یک برش بزنیم (مطابق شکل)، نسبت حجم مخروط‌های ایجاد شده با مکعب نسبت ارتفاع‌هایشان و هم‌چنین با مکعب نسبت شعاع‌هایشان برابر است:



$$\frac{V_{\text{مخروط کوچک}}}{V_{\text{مخروط بزرگ}}} = \left(\frac{h_2}{h_1}\right)^3 = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^3 = \left(\frac{a'}{a}\right)^3$$

مغوشلند

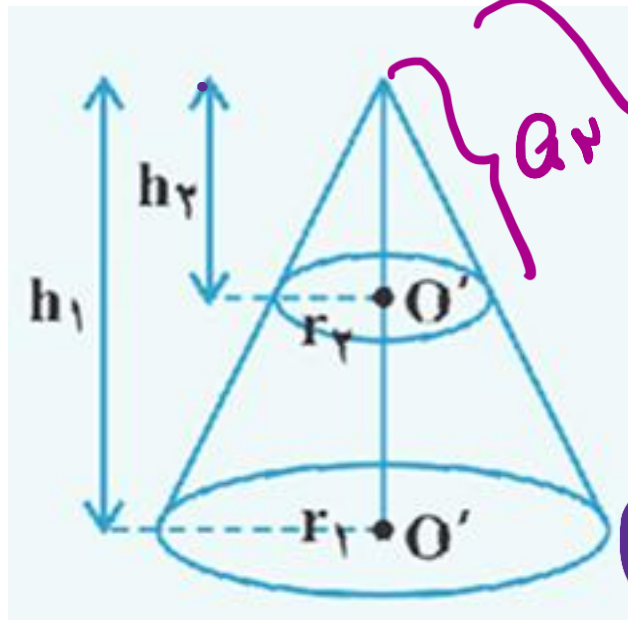
سرزمین تیزهوشان ایران



استاد وحید اسدی‌کیا



اگر صفحه‌ای عمود بر ارتفاع یک مخروط آن را به دو حجم مساوی تقسیم کند، نسبت ارتفاع دو مخروط حاصل چه قدر است؟



$$\frac{h_1}{h_2} = ? = \frac{r_1}{r_2} = \frac{a_1}{a_2}$$

$$\sqrt[3]{2}$$

$$2$$

$$\sqrt{2}$$

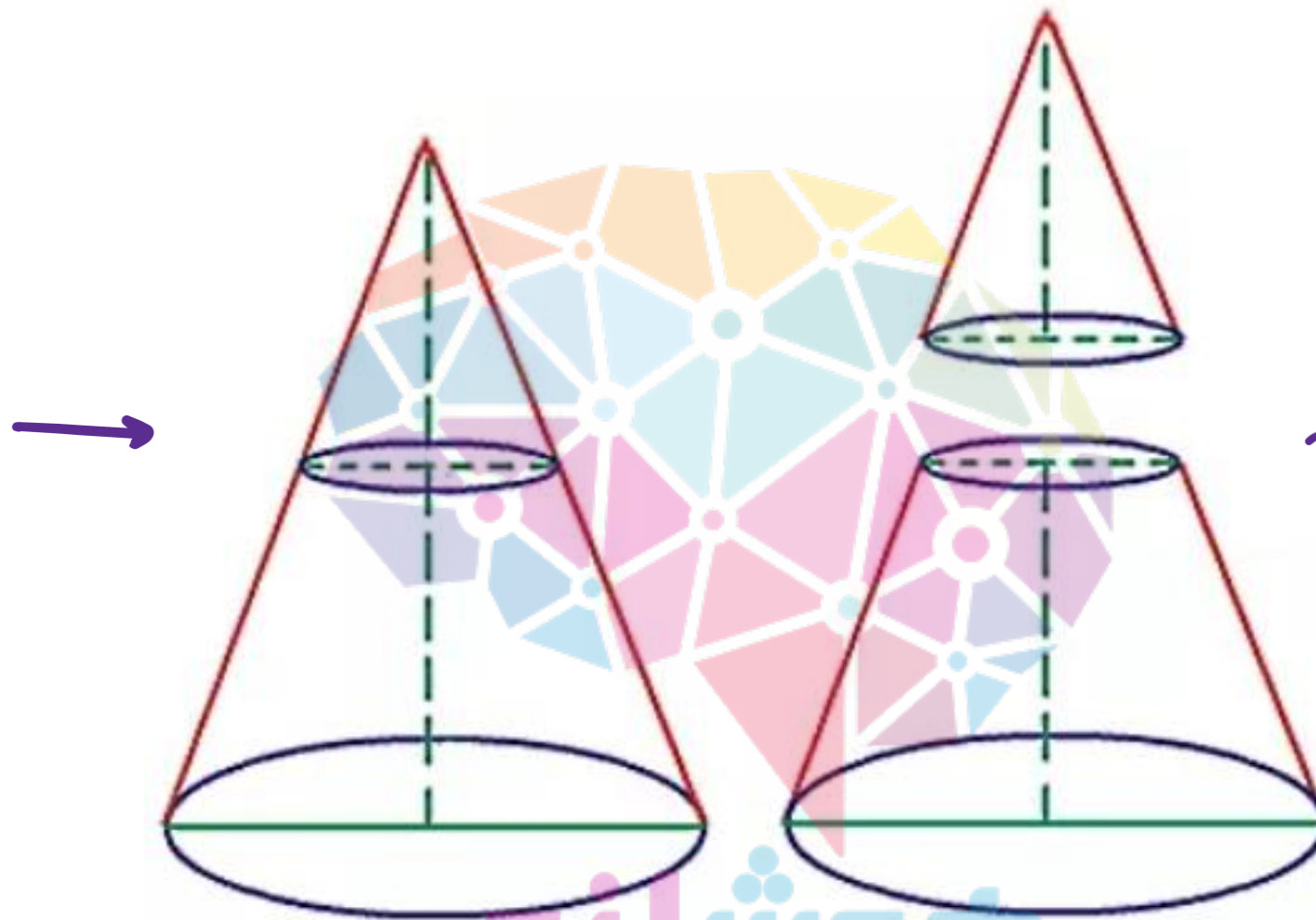
$$2$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^3 = \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^3 \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{r_1^3}{r_2^3} = \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^3$$

$$\frac{h_1}{h_2} = \sqrt[3]{2}$$



مخروط ناقص



مخروط ناقص

فروشگاه

سرزمینی تیزهوشان ایران



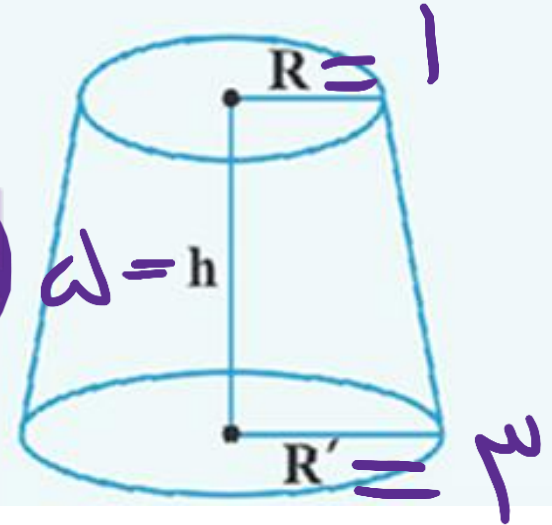
استاد وحید اسدی کیا



نکته اگر مخروطی را به موازات قاعده‌ی آن برش دهیم، مخروط ناقص حاصل می‌شود که مطابق شکل رابطه‌ی زیر را در مورد آن می‌توان نوشت:

حجم مخروط ناقص $V = \frac{1}{3} \pi h (R^2 + R'^2 + RR')$

$$V = \frac{1}{3} \pi \times 8 \times (1^2 + 3^2 + 1 \times 3)$$



هوش‌سلند

سرزمین تیزهوشان ایران



استاد وحید اسدی‌کیا

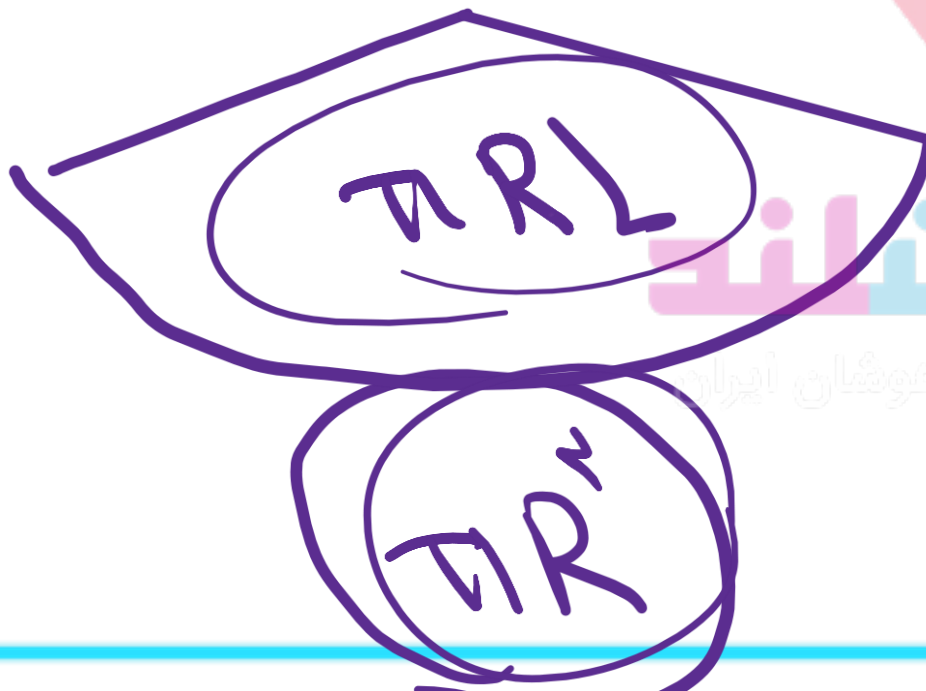
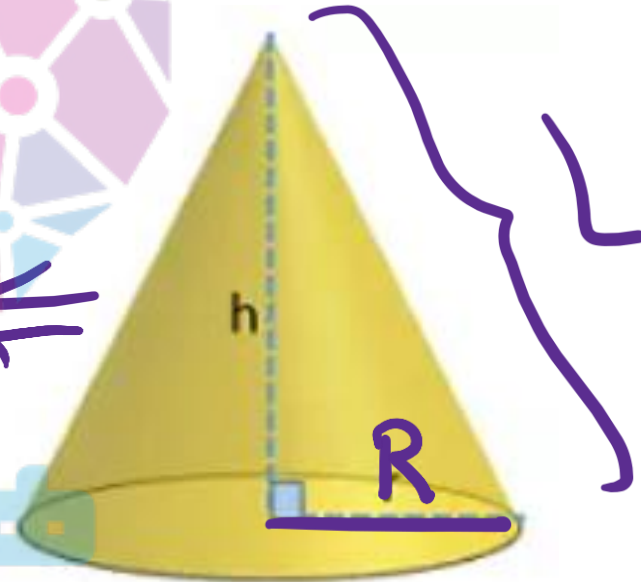


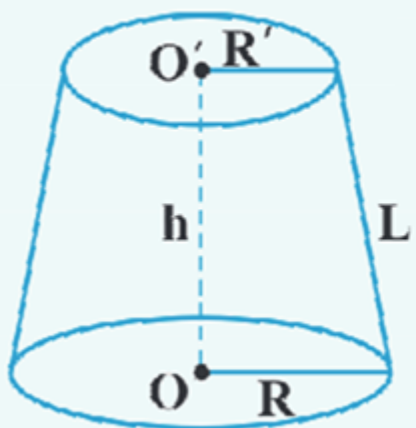
نکته مساحت جانبی و مساحت کل هر مخروط به شعاع قاعده‌ی R و مولد L از رابطه‌ی زیر به دست

می آید:

$$S_{\text{جانبی}} = \pi RL$$

$$S_{\text{کل}} = \pi RL + \pi R^2 = \pi R(L + R)$$





مساحت جانبی و مساحت کل هر مخروط ناقص قائم از رابطه‌های
زیر به دست می‌آید:

$$S_{\text{جانبی}} = \pi(R + R')L$$

$$S_{\text{کل}} = \pi(R^2 + R'^2 + (R + R')L)$$

هوش‌شوند

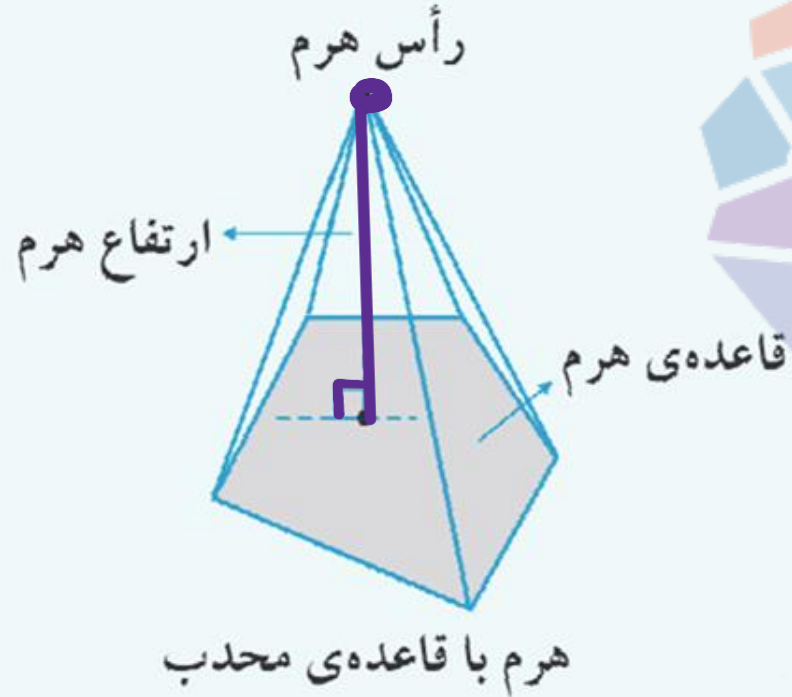
سرزمین تیزهوشان ایران



استاد وحید اسدی‌کیا



هرم، شکل فضایی است که دارای یک قاعده به شکل چندضلعی است. غیر از قاعده‌ی آن، همه‌ی وجه‌های آن یکدیگر را در یک نقطه به نام «رأس هرم» قطع می‌کنند. به این وجه‌ها، وجه جانبی می‌گویند که همه‌ی آن‌ها مثلث هستند.

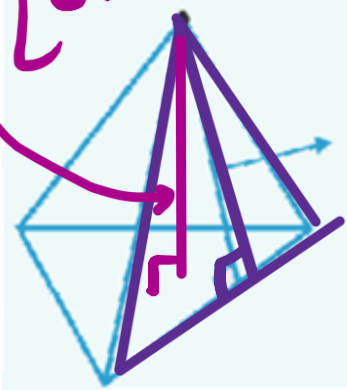


به پاره‌خطی که از رأس هرم به قاعده‌ی آن عمود می‌شود، ارتفاع هرم گفته می‌شود.





ارتفاع هرم



سهم هرم

نکته در هر هرم، به ارتفاع وجه جانبی، سهمِ هرم گفته می‌شود:



هوش‌شوند

سرزمینی تیزهوشان ایران



استاد وحید اسدی‌کیا

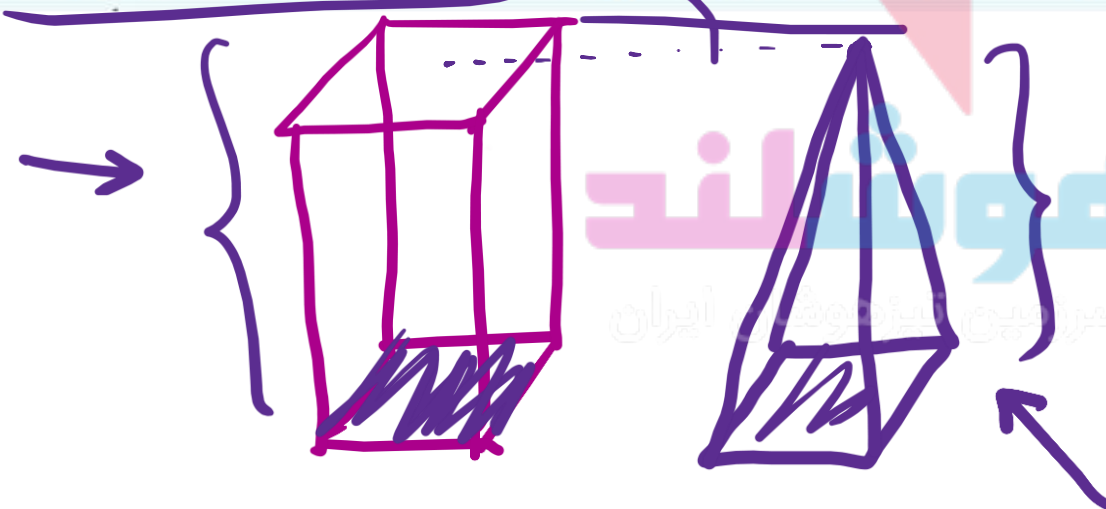


نکته هرگاه قاعده و ارتفاع یک هرم با قاعده و ارتفاع یک منشور برابر باشد، حجم هرم، $\frac{1}{3}$ حجم این منشور است. پس می توان نوشت:

$$V_{\text{هرم}} = \frac{1}{3} S \cdot h$$

که در آن S مساحت قاعده‌ی هرم و h ارتفاع هرم است.

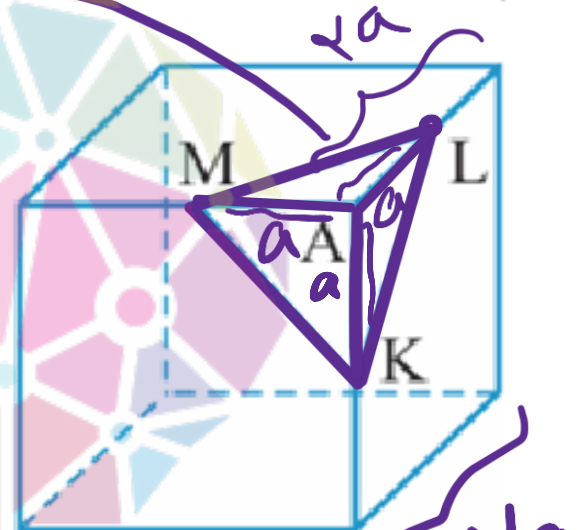
نکته اگر قاعده‌های یک هرم، چندضلعی منتظم و ارتفاع رسم شده از رأس آن بر مرکز قاعده‌ی آن فرود آید، به آن، هرم منتظم می گویند که در آن، همه‌ی وجه‌های جانبی، مثلث متساوی الساقین همنهشت هستند.



در مکعب شکل مقابل K، L و M وسط‌های سه یال هستند، حجم هرم AMLK

چه کسری از حجم مکعب است؟

- ☒ ۱ $\frac{1}{48}$
☐ ۲ $\frac{1}{12}$
☐ ۳ $\frac{1}{24}$
☐ ۴ $\frac{1}{16}$



$$\frac{\left(\frac{a \times a \times a}{6} \right) \div 3}{(2a)^3} = \frac{\frac{a^3}{6}}{8a^3} = \frac{1}{48}$$

حجم مکعب
 حجم هرم AMLK



نکته به هرمی که چهار وجه آن، مثلث متساوی الاضلاع باشد، چهاروجهی منتظم می‌گوییم.

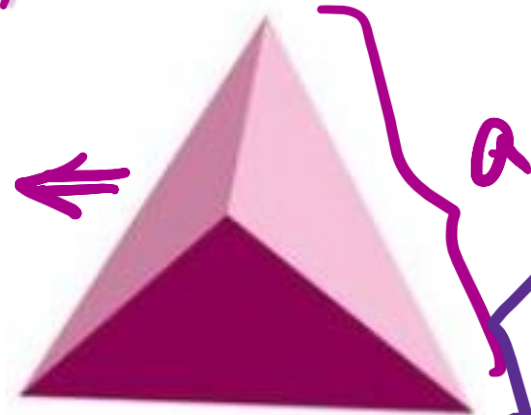
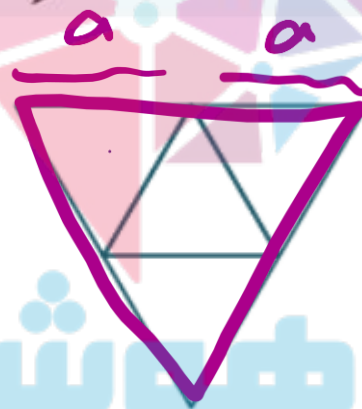
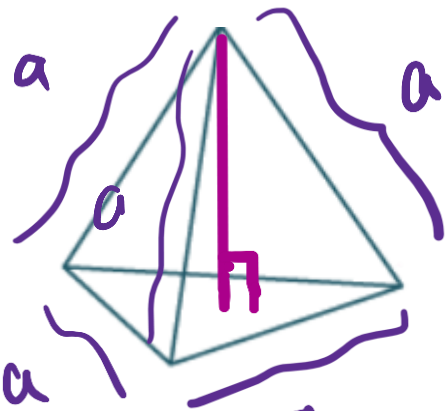
چهاروجهی منتظم که در آن اندازه‌ی هر یال a است، همواره داریم:

$$h = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} a = \frac{\sqrt{2}}{3} \times a$$

$$V = \frac{\sqrt{2}}{12} a^3 = \frac{\sqrt{2}}{12} \times 10^3 = 12.6$$

نکته در هر چهاروجهی منتظم به طول یال a همواره داریم:

$$S = \sqrt{3} a^2$$



$$S = \sqrt{3} a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times (2a)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 4a^2 = \sqrt{3} a^2$$

نکته

در هر چهاروجهی منتظم به اندازه‌ی یال a ، همواره داریم:

$$r = \frac{\sqrt{6}}{12} a$$

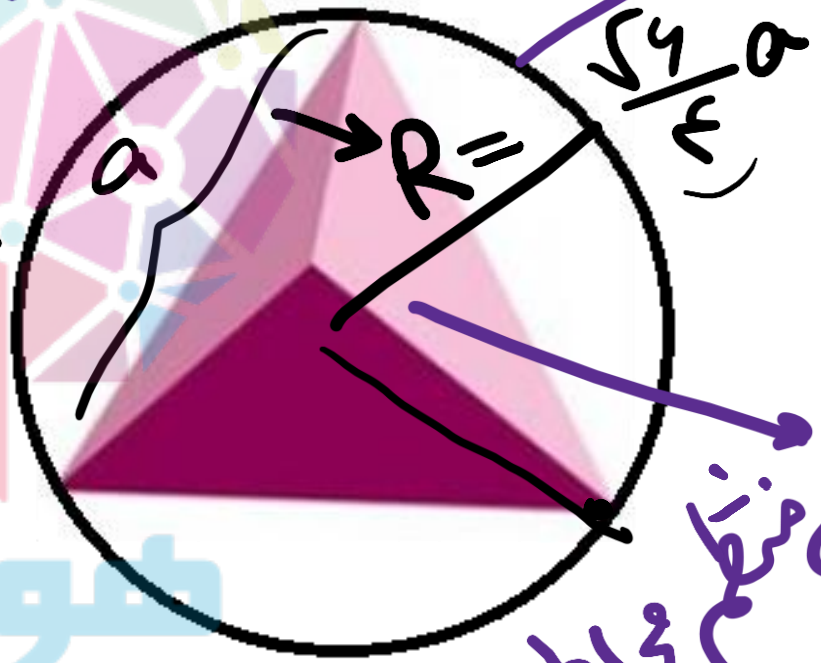
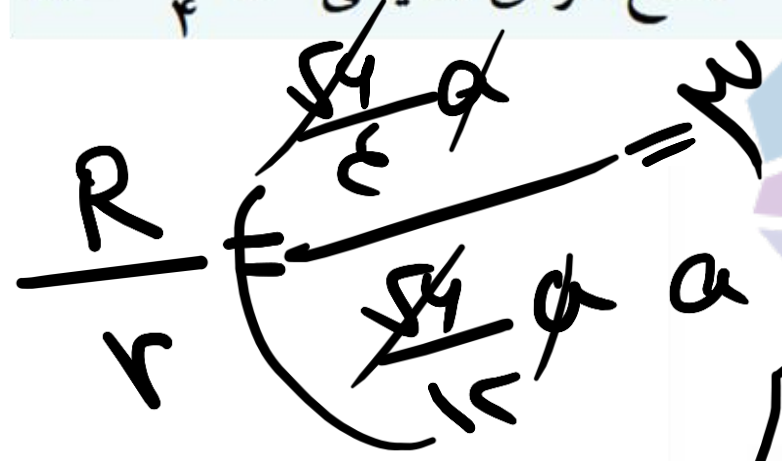
شعاع کره‌ی محاطی

$$R = \frac{\sqrt{6}}{4} a$$

شعاع کره‌ی محیطی

کره محیطی

کره محاطی



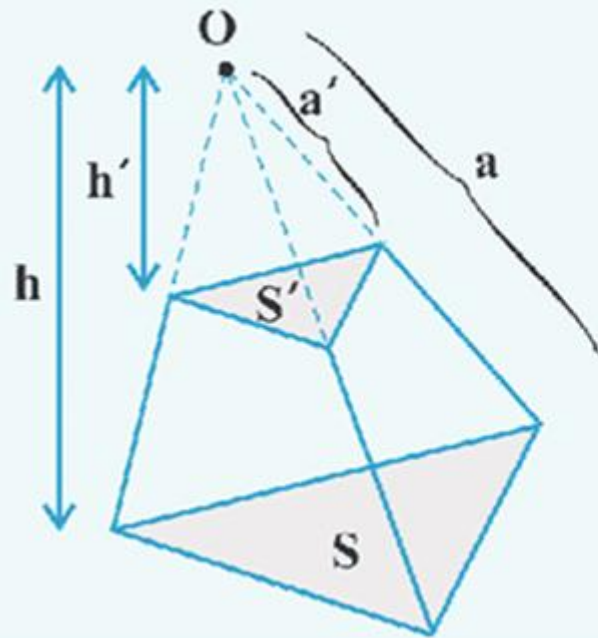
در اندازه‌ی منتظم محاطی

در اندازه‌ی منتظم محیطی



نکته در هر هرم با قاعده‌های موازی (مطابق شکل)

همواره داریم:



(۱) رابطه‌ی $\frac{a'}{a} = \frac{h'}{h}$:

(۲) رابطه‌ی $\frac{S'}{S} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2 = \left(\frac{a'}{a}\right)^2$:

دو بعدی است.

هوش‌شانت
سرزمین تیزهوشان ایران



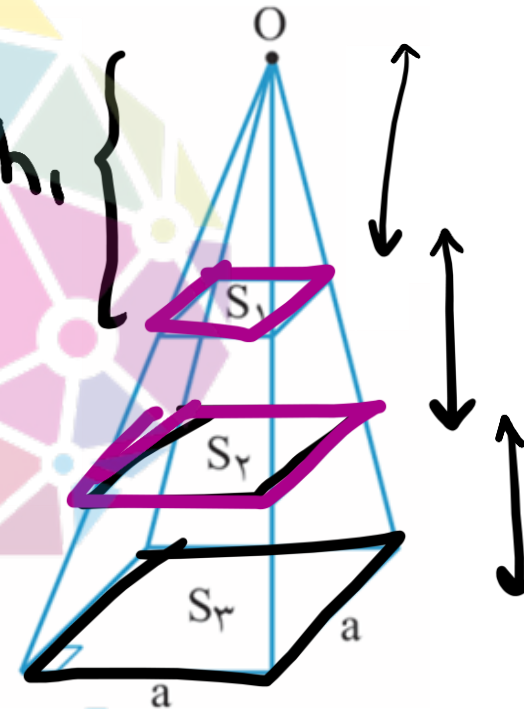
استاد وحید اسدی‌کیا



قاعده‌ی هرمی، مربعی به ضلع a است. اگر ارتفاع آن را به ۳ قسمت مساوی تقسیم کنیم و دو صفحه موازی قاعده از نقاط تقسیم رسم کنیم، نسبت مساحت‌های دو قاعده‌ی هرم‌های حاصل چه قدر است؟

$$\frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\frac{S_2}{S_3} = \left(\frac{h_2}{h_3}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$



- ۱ - $\frac{1}{4}$
- ۲ - $\frac{1}{9}$
- ۳ - $\frac{1}{16}$
- ۴ - $\frac{1}{25}$

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{h_2}{h_3} = \frac{2}{3}$$



نسبت مساحت‌ها ۱/۴ و ۴/۹ است
 از کجا می‌آید؟
 نسبت ارتفاع ۱/۲ و ۲/۳

