



فصل ۱: مجموعه ها و احتمال

فصل ۲: اعداد حقیقی

فصل ۳: هندسه

فصل ۴: توان و ریشه

فصل ۵: جبر و اتحادهای جبری

فصل ۶: معادله خط

فصل ۷: عبارتهای گویای جبری

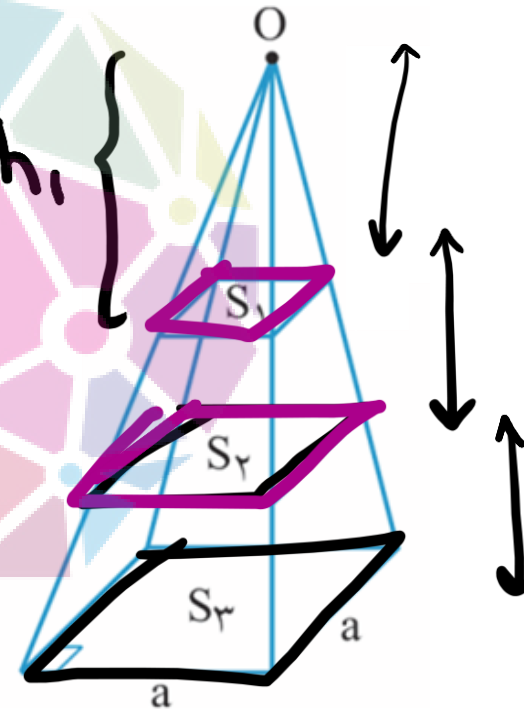
فصل ۸: حجم



قاعده‌ی هرمی، مربعی به ضلع a است. اگر ارتفاع آن را به ۳ قسمت مساوی تقسیم کنیم و دو صفحه موازی قاعده از نقاط تقسیم رسم کنیم، نسبت مساحت‌های دو قاعده‌ی هرم‌های حاصل چه قدر است؟

$$\frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\frac{S_2}{S_3} = \left(\frac{h_2}{h_3}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$



- ۱ - $\frac{1}{4}$
- ۲ - $\frac{1}{9}$
- ۳ - $\frac{4}{9}$
- ۴ - $\frac{1}{2}$

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{h_2}{h_3} = \frac{2}{3}$$



نسبت مساحت‌ها ۱/۴
نسبت ارتفاع‌ها ۱/۲





مسابقات
ریاضی نهم
بانک سوال



تیزهوشان



وحید اسدی کیا

با پیش از ۲۰۰۰ تست چهار گزینه‌ای
در کتابخانه‌ی کلیه‌ی مدارس ریاضی کتاب نهم
چهارم دبستان و کتاب ریاضی کتاب نهم
دری و کتاب ریاضی کتاب نهم و کتاب ریاضی
کتاب نهم کتاب نهم کتاب نهم

فصل حجم و مساحت

تیزهوشان

سرزمین تیزهوشان ایران



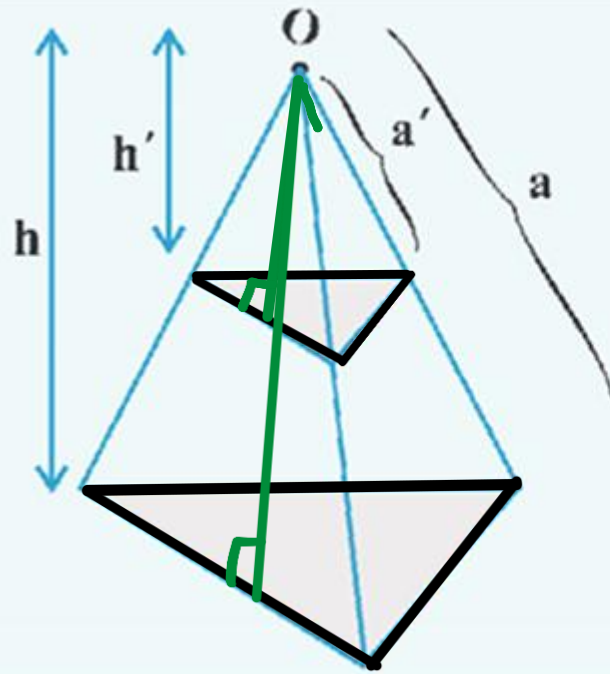
استاد وحید اسدی کیا



نکته در هر هرم با قاعده‌های موازی اگر حجم هرم فوقانی

را با V' و حجم هرم اصلی را با V نمایش دهیم، همواره داریم:

$$\frac{V'}{V} = \left(\frac{h'}{h}\right)^3 = \left(\frac{a'}{a}\right)^3$$

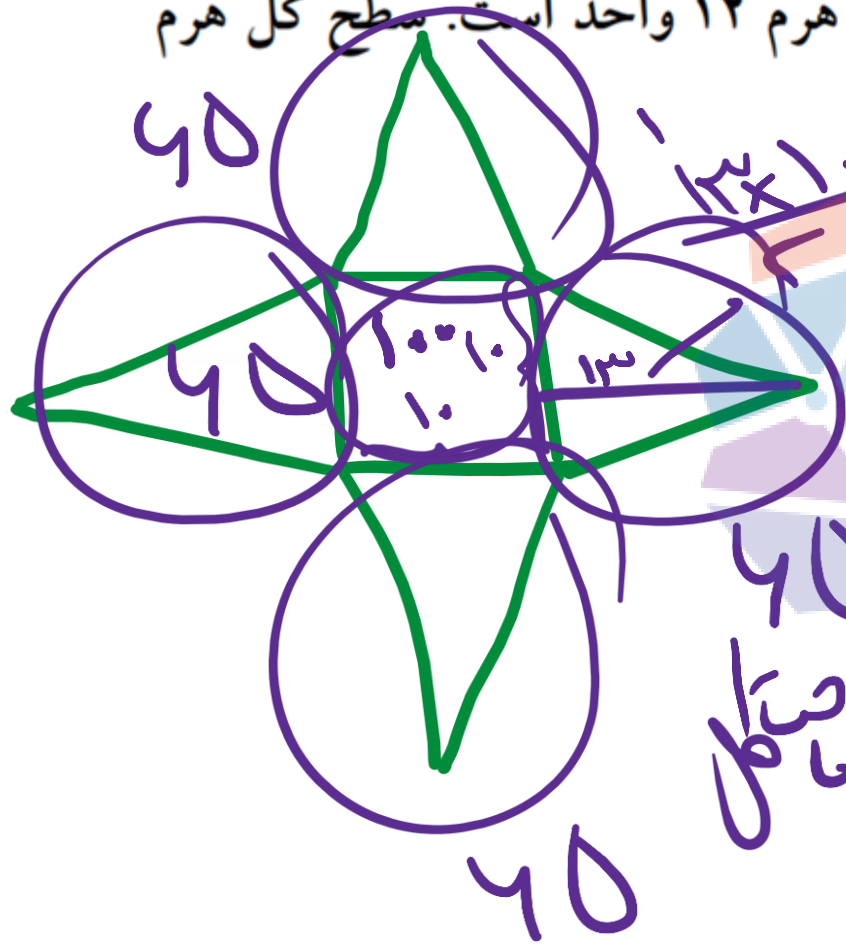


مفوشلند



در یک هرم منتظم با قاعده‌ی مربع، ارتفاع هر وجه جانبی ۱۳ و ارتفاع هرم ۱۲ واحد است. سطح کل هرم چند واحد مربع است؟

- ۱ ۲۸۵
- ۲ ۳۲۰
- ۳ ۳۲۵
- ۴ ۳۶۰



$$13^2 = 12^2 + \overline{BH}$$

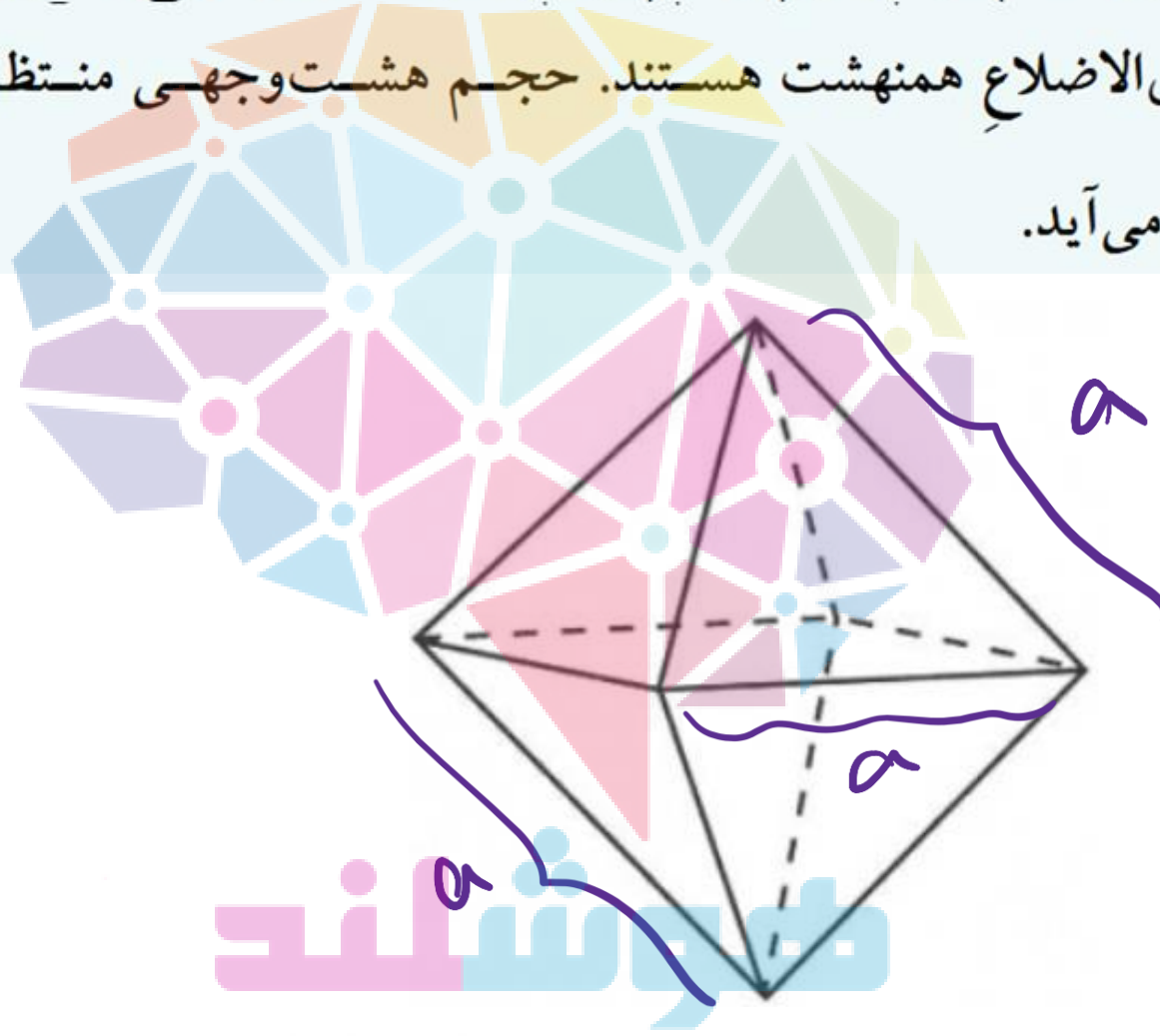
$$169 = 144 + \overline{BH}$$

$$\overline{BH} = 25$$

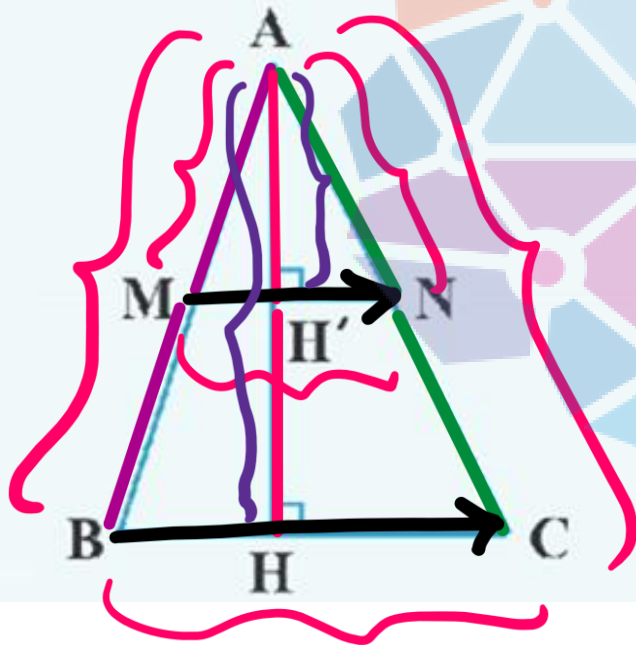


نکته هر هشت وجهی منتظم از دو هرم به هم چسبیده با قاعده‌ی مربع تشکیل شده است، که وجه‌های آن‌ها مثلث‌های متساوی‌الاضلاع همنهشت هستند. حجم هشت وجهی منتظم به طول یال a از رابطه‌ی

$$V = \frac{\sqrt{2}}{3} a^3 \quad \text{به دست می‌آید.}$$



نکته قضیه تالس: در مثلث ABC که در آن $MN \parallel BC$ و AH ارتفاع آن است، داریم:



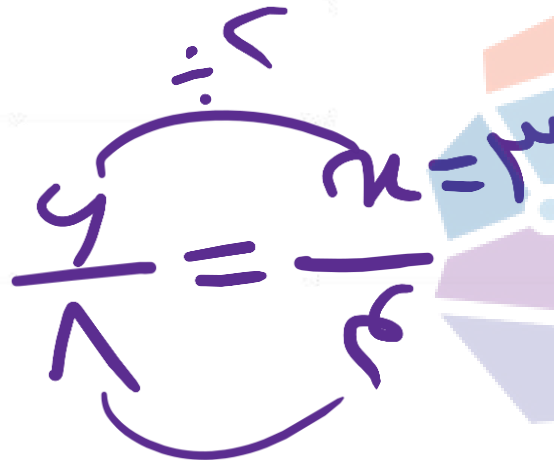
رابطه‌ی (۱) $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} = \frac{AH'}{HH'}$ نسبت؟

رابطه‌ی (۲) $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} = \frac{AH'}{AH}$ نسبت؟

مغوشلند



درون مخروطی به ارتفاع ۸ (مطابق شکل) مقداری آب به ارتفاع ۶ وجود دارد. اگر سنگی درون آن بیاندازیم آب آنقدر بالا می آید که مخروط کاملاً پر می شود. حجم سنگ بر حسب π چه قدر است؟



- ۱) 18π
- ۲) $\frac{74\pi}{3}$
- ۳) $\frac{14\pi}{3}$
- ۴) $\frac{32\pi}{3}$

حجم سنگ = حجم مخروط بزرگ - حجم مخروط کوچک

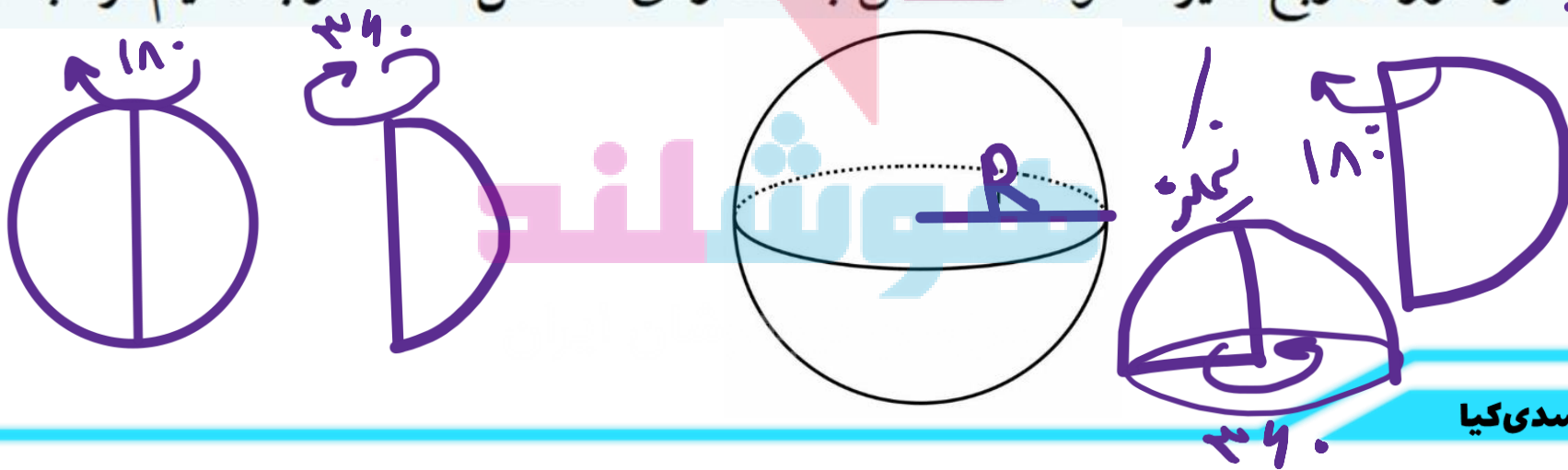
$$= \frac{6 \times 6 \times \pi \times 8}{3} - \frac{4 \times 4 \times \pi \times 6}{3}$$

$$= \frac{128\pi - 96\pi}{3} = \frac{32\pi}{3}$$



نکته سطح کره، مکان هندسی نقاطی از فضا است که از نقطه‌ی ثابتی به نام «مرکز کره» به فاصله‌ی ثابتی قرار دارند. این فاصله، اندازه‌ی شعاع کره است.

- نکته**
- ۱- از دوران دایره حول قطرش به اندازه‌ی حداقل 180° درجه، کره به دست می‌آید.
 - ۲- از دوران نیم‌دایره حول قطرش به اندازه‌ی حداقل 360° درجه، کره به دست می‌آید.
 - ۳- از دوران نیم‌دایره حول قطرش به اندازه‌ی دقیقاً 180° درجه، نیم‌کره به دست می‌آید.
 - ۴- از دوران ربع دایره حول شعاعش به اندازه‌ی حداقل 360° درجه، نیم‌کره به دست می‌آید.



نکته حجم کره به شعاع R برابر است با:

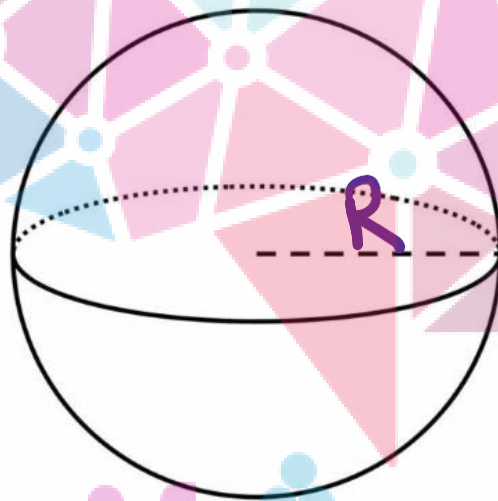
$$V = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \times \pi \times \left(\frac{D}{2}\right)^3 = \frac{4}{3} \times \pi \times \frac{D^3}{8} = \frac{1}{6} \pi D^3 = \frac{\pi}{6} D^3$$

اگر قطر کره را با D نمایش دهیم، حجم کره برابر است با:

$$V = \frac{1}{6} \pi D^3 = \frac{\pi}{6} D^3$$

نتیجه حجم نیم کره به شعاع R برابر است با:

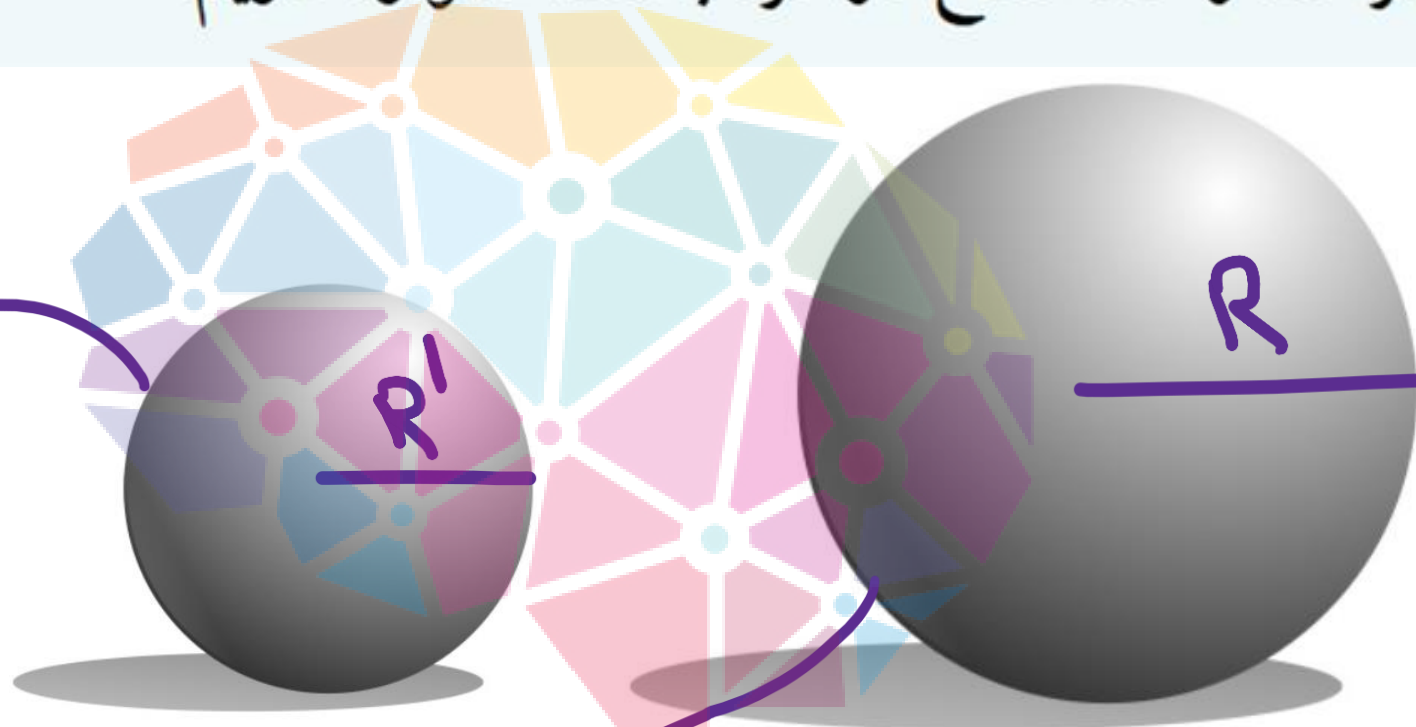
$$V = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{2}{3} \pi R^3$$



$$\frac{V'}{V} = \left(\frac{R'}{R}\right)^3$$

نکته اگر R و R' شعاع دو کره باشند، همواره داریم:

$$\frac{\frac{V'}{V}}{\frac{R'}{R}} = \left(\frac{R'}{R}\right)^2$$



هموشکلند



قطر کره‌ی ماه تقریباً $\frac{1}{4}$ قطر کره زمین است. (حجم زمین چند برابر حجم ماه است؟)

$$\frac{V_{\text{ماه}}}{V_{\text{زمین}}} = \left(\frac{R_{\text{ماه}}}{R_{\text{زمین}}} \right)^3 = \left(\frac{1}{4} \right)^3 = \frac{1}{64}$$

۴ ۱

۸ ۲

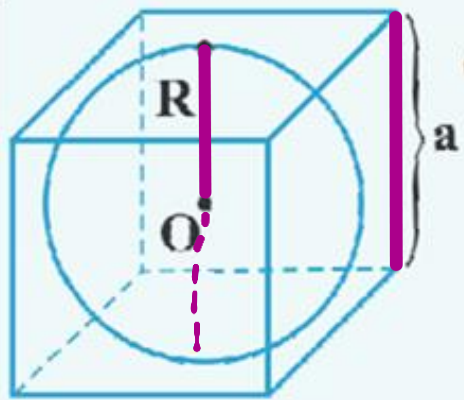
۳۲ ۳

۶۴ ۴

$$\frac{D_{\text{ماه}}}{D_{\text{زمین}}} = \frac{R_{\text{ماه}}}{R_{\text{زمین}}}$$

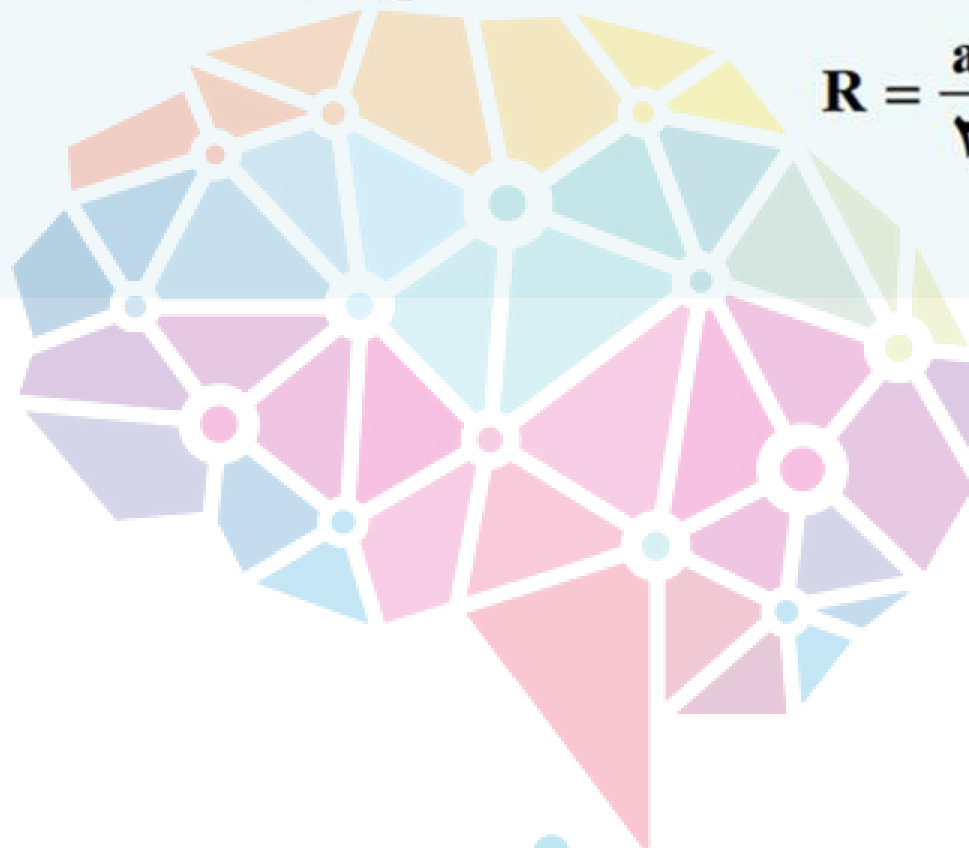
نکته: اگر قطر دایره، یا رادیوس آن n برابر شود،
مساحت آن نیز n^2 برابر می‌شود.





نکته هرگاه مکعبی بر یک کره محیط باشد، شعاع کره، نصف اندازه‌ی یال مکعب است.

$$R = \frac{a}{2}$$



مفروشند



$$R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

نکته شعاع کره‌ی محیطی هر مکعب به طول یال a همواره برابر است با:

پس می‌توان نتیجه گرفت اندازه‌ی ضلع مکعب محاط شده در کره به شعاع R برابر است با: $a = \frac{2R}{\sqrt{3}}$



قطر = قطر مکعب

$$2R = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2}$$

$$2R = a\sqrt{3}$$

$$R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$



مغوششاند



در کره‌ای به شعاع R یک مکعب محاط شده است. نسبت حجم این کره به مکعب نام برده کدام است؟

$$\frac{\text{حجم کره}}{\text{حجم مکعب}} = \frac{\frac{4}{3} \times \pi R^3}{a^3} = \frac{\frac{4}{3} \times \pi \times \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^3}{a^3}$$

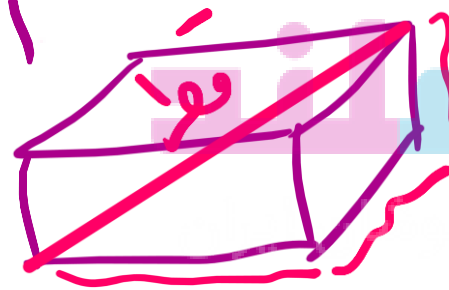
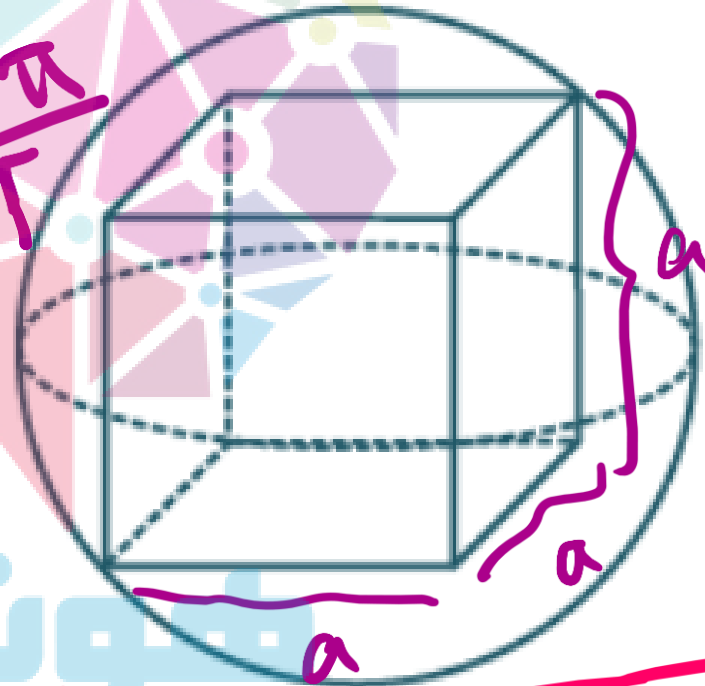
$$= \frac{\frac{4}{3} \times \pi \times \frac{a^3 \sqrt{3}}{2}}{a^3} = \frac{2\sqrt{3}\pi}{3}$$

۱. $\frac{\sqrt{3}}{3} \pi$

۲. $\frac{\sqrt{2}}{2} \pi$

۳. $\frac{\sqrt{6}}{2} \pi$

۴. $\frac{\sqrt{3}}{2} \pi$



کاشانه + کف + کف = $\sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = \sqrt{3}a$

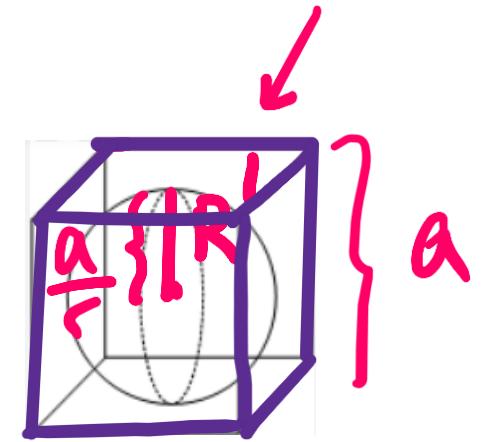
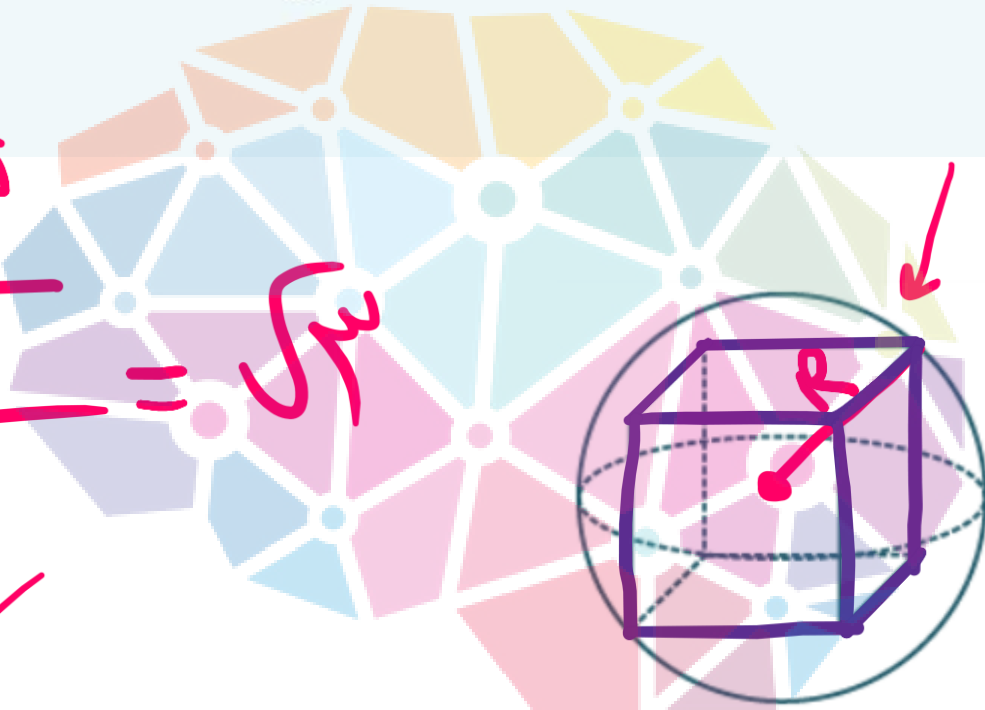


نکته اگر شعاع کره‌ی محیط بر یک مکعب را با R و شعاع کره‌ی محاط بر آن را با R' نمایش دهیم،

$$\frac{R}{R'} = \sqrt{3}$$

همواره داریم:

$$\frac{R}{R'} = \frac{\cancel{a} \sqrt{3}}{\cancel{a}} = \sqrt{3}$$



مفوشلند



نسبت حجم دو کره که محیط و محاط بر یک مکعب هستند، برابر است با:

$$\frac{R}{R_1} = \sqrt{3}$$

$$\frac{\text{حجم کره بزرگ}}{\text{حجم کره کوچک}} = \left(\frac{R}{R_1} \right)^3 = \sqrt{3}^3 = 3\sqrt{3}$$

$$\frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}$$



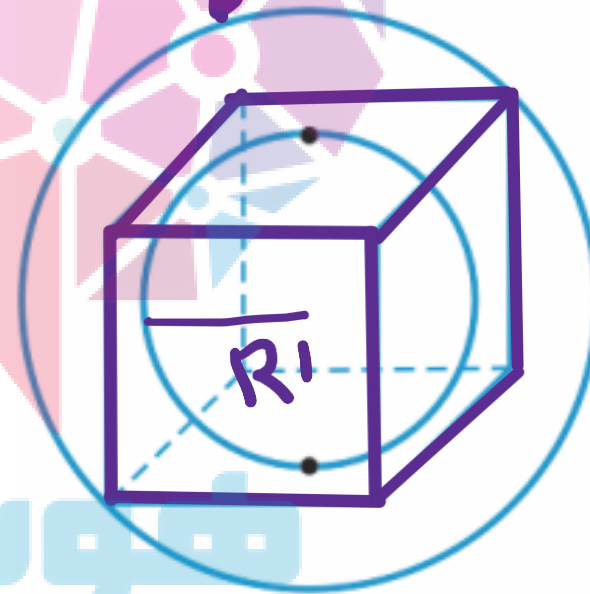
$$\frac{\sqrt{3}}{2}$$



$$3\sqrt{3}$$



$$\frac{\sqrt{3}}{9}$$



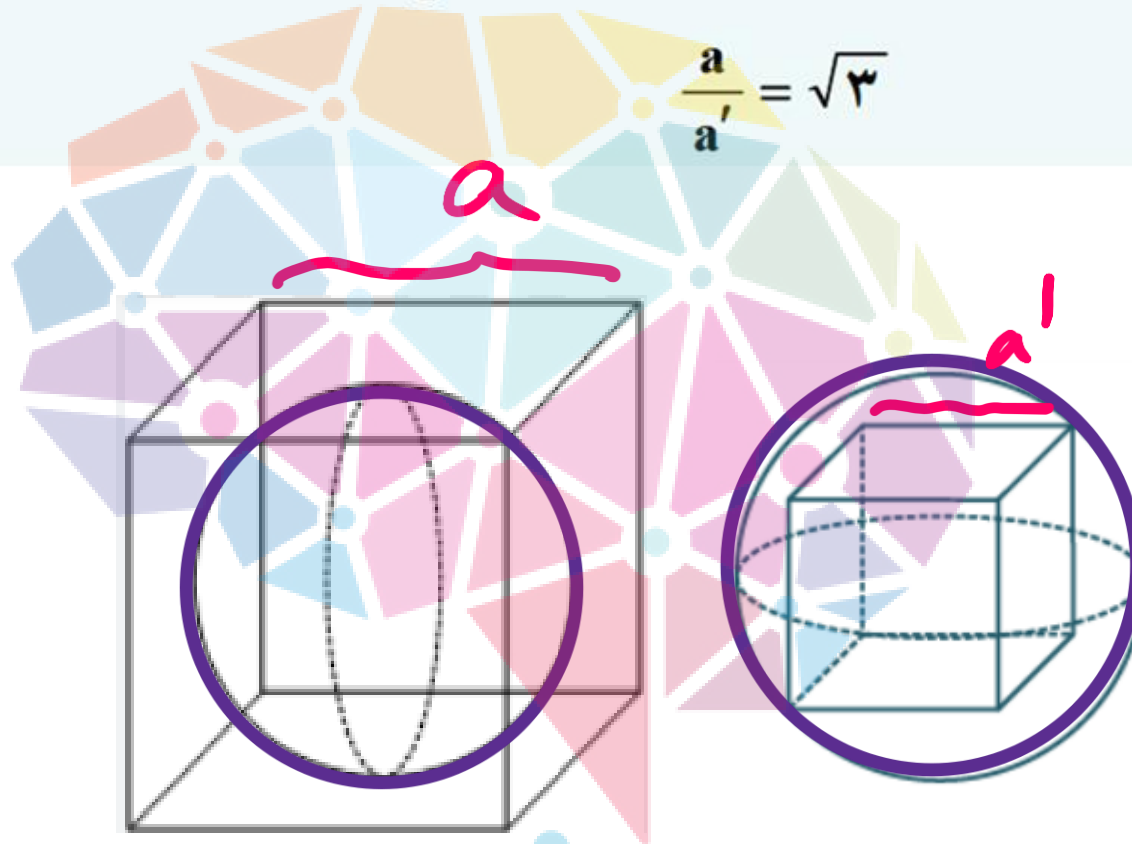
مفوشانند



نکته اگر ضلع مکعب محیط بر کره‌ای را با a و ضلع مکعب محاط بر این کره را با a' نمایش دهیم،

همواره داریم:

$$\frac{a}{a'} = \sqrt{3}$$



مفوشلند



$$S = 4\pi R^2$$

نکته مساحت کره به شعاع R برابر است با:

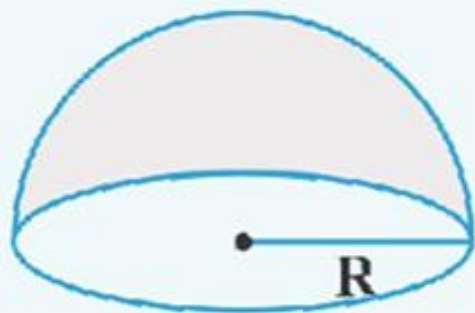


مفوشلند

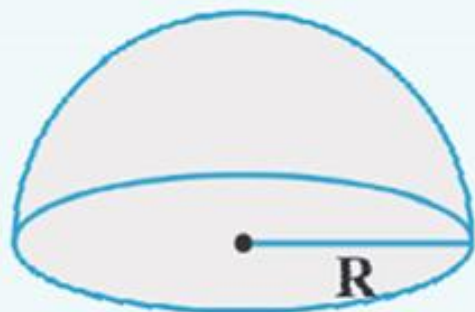




مساحت نیم کره ی بی قاعده (یا اصطلاحاً نیم کره ی ناقص):



$$S = 2\pi R^2$$



$$S = 3\pi R^2$$

مساحت نیم کره با قاعده (نیم کره ی کامل):

$$2\pi R^2 + \pi R^2 = 3\pi R^2$$

مغوشلند

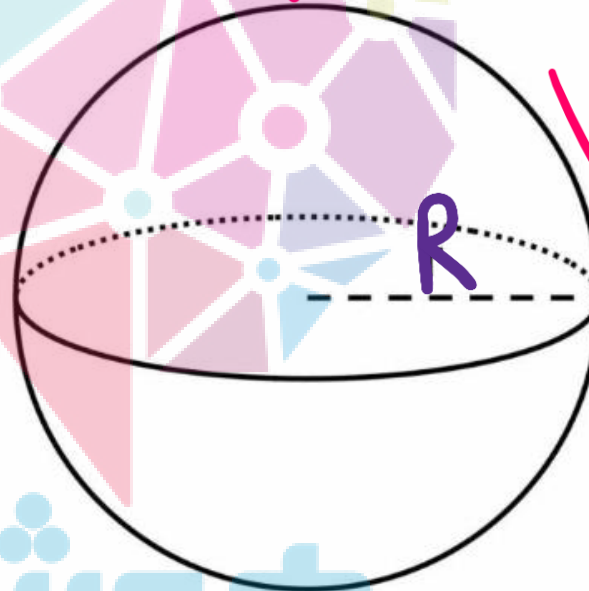


نکته اگر S مساحت کره به شعاع R باشد، همواره داریم:

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{S}{\pi}}$$

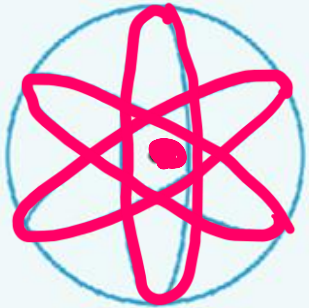
$$\frac{S}{4\pi} = \frac{4\pi R^2}{4\pi} \Rightarrow R^2 = \frac{S}{4\pi} \Rightarrow R = \frac{\sqrt{S}}{2\sqrt{\pi}}$$

$$R = \frac{1}{2} \times \sqrt{\frac{S}{\pi}}$$



مفوشلند





نکته اگر کره‌ای را برش بزنیم، در صورتی که برش از مرکز کره بگذرد، سطح

مقطع آن دایره‌ای می‌باشد که به آن «دایره‌ی عظیمه‌ی کره» گفته می‌شود.

هر کره بی‌شمار دایره‌ی عظیمه دارد که مرکز آن‌ها، همان مرکز کره است و شعاع آن‌ها با شعاع کره برابر است.

اگر شعاع کره را با R نمایش دهیم، مساحت هریک از این دایره‌ها $S = \pi R^2$ و محیط هریک از آن‌ها $2\pi R$ است.

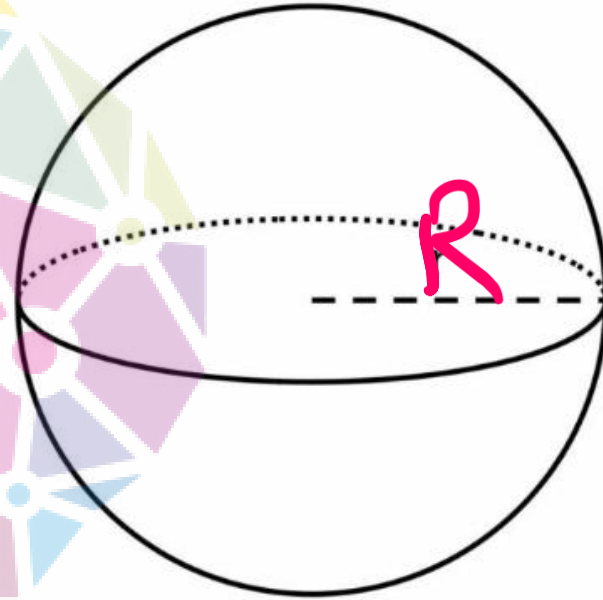
مفوشلند



$$\frac{V}{S} = \frac{R}{3}$$

نکته در هر کره به شعاع R ، همواره نسبت حجم به مساحت آن، ثلث شعاع می باشد:

$$\frac{\text{حجم کره}}{\text{مساحت کره}} = \frac{\frac{4}{3} \pi R^3}{4 \pi R^2} = \frac{R}{3}$$

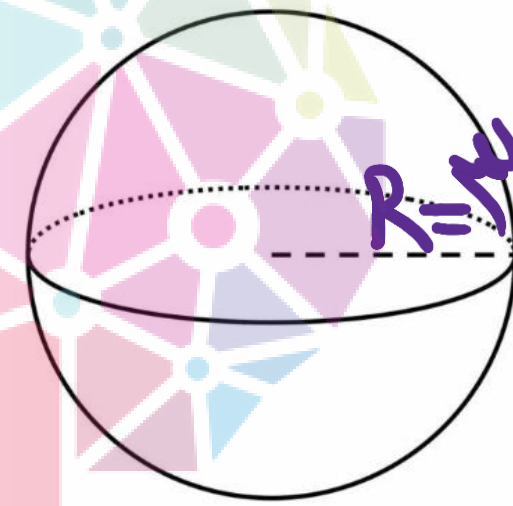


مفوشلند



نکته اگر شعاع کره‌ای ۳ واحد باشد، همواره عدد مساحت کره با عدد حجم آن برابر می‌شود که در این صورت حاصل همواره 36π است.

کره:



$$R=3 \begin{cases} 4\pi R^2 = 36\pi \\ \frac{4}{3}\pi R^3 = 36\pi \end{cases}$$

دایره



مساحت = 36π



یک بادکنک کروی را در لحظه‌ای که عدد حجم و عدد سطح آن برابر است باد می‌کنیم و $\frac{148\pi}{3}$ واحد مکعب هوا به

درون آن وارد می‌کنیم. در اثر انبساط، سطح بادکنک چه قدر افزایش می‌یابد؟

۱ 28π

۲ 18π

۳ 16π

۴ 24π

$$V = 3 \Rightarrow V = 34\pi$$

$$V_{\text{حجم}} = 34\pi + \frac{148\pi}{3} = \frac{108\pi + 148\pi}{3} = \frac{256\pi}{3}$$

مساحت جانبی = 34π
مساحت کل = $4\pi R^2$

$$4\pi R^2 = 4\pi \times 4 = 16\pi$$

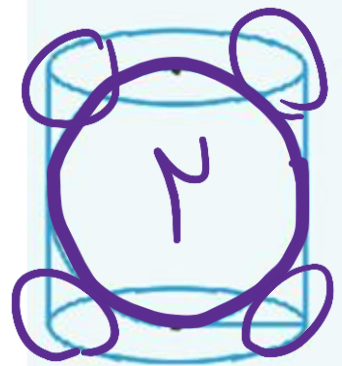
$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{256\pi}{3}$$

$$16\pi - 34\pi = -18\pi$$

$$R^3 = 64 \Rightarrow R = 4$$



حجم‌های ترکیبی کره، استوانه و مخروط



نکته حجم کره‌ی محاط شده درون یک استوانه، همواره $\frac{2}{3}$ حجم آن استوانه است.

$$V_{\text{کره محاطی}} = \frac{2}{3} \times V_{\text{استوانه محیطی}}$$



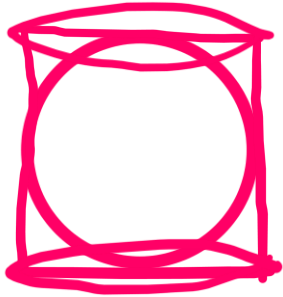
نکته : حجم فضای خالی بین کره و استوانه، $\frac{1}{3}$ حجم استوانه است.

نکته : حجم فضای خالی بین کره و استوانه، $\frac{1}{3}$ حجم استوانه است.

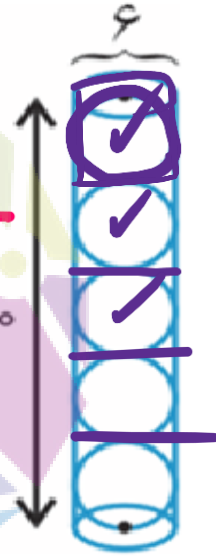


یک قوطی توپ‌های تنیس داریم که ارتفاع آن درست به اندازه‌ی ۵ توپ و قطر دهانه‌ی آن ۶cm می‌باشد. حساب کنید

فضای بین توپ‌ها چند برابر حجم یک توپ است؟



$$2.5 = \frac{5}{2} = \frac{1}{2} \times 5$$



۱) ۳ برابر

۲) ۲/۵ برابر

۳) ۵ برابر

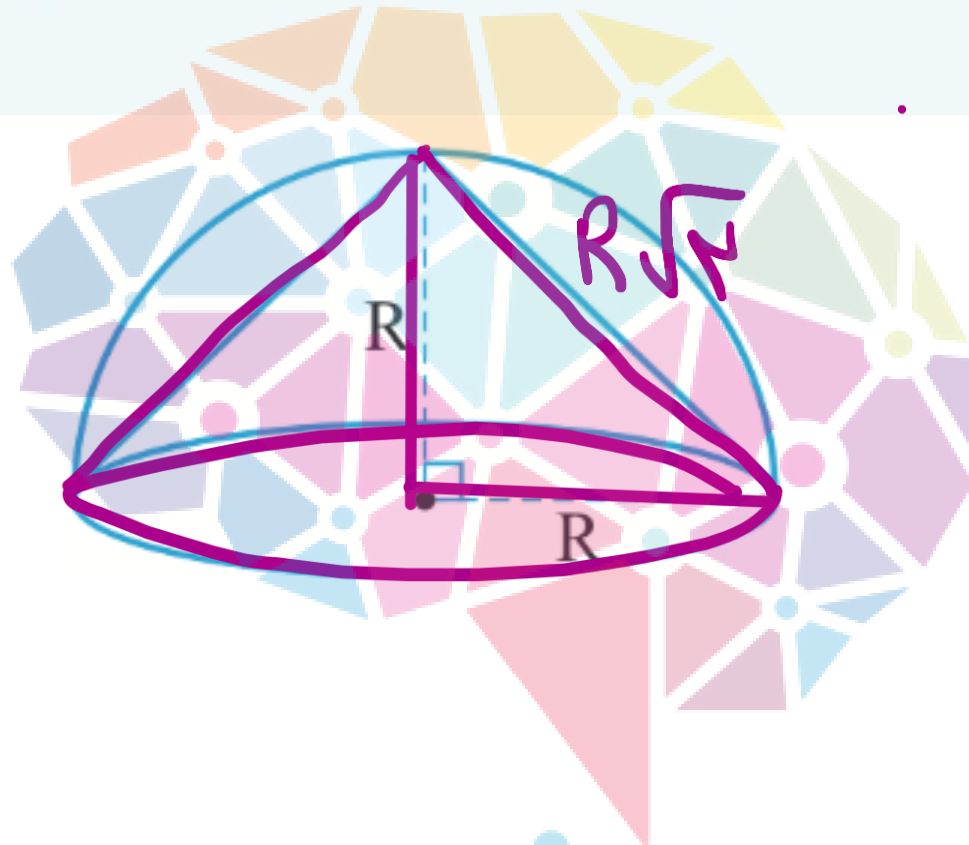
۴) ۷/۵ برابر

حجم توپ‌ها = حجم استوانه = حجم خالی

$$\frac{\text{حجم خالی}}{\text{حجم توپ}} = \frac{\frac{1}{3} \pi R^2 h}{\frac{2}{3} \pi R^2 h} = \frac{1}{2} = 0.5$$



نکته مخروط محاط شده درون یک نیم کره، در صورتی بیشترین حجم را دارد که ارتفاع مخروط با شعاع نیم کره برابر باشد.



مفوشلند



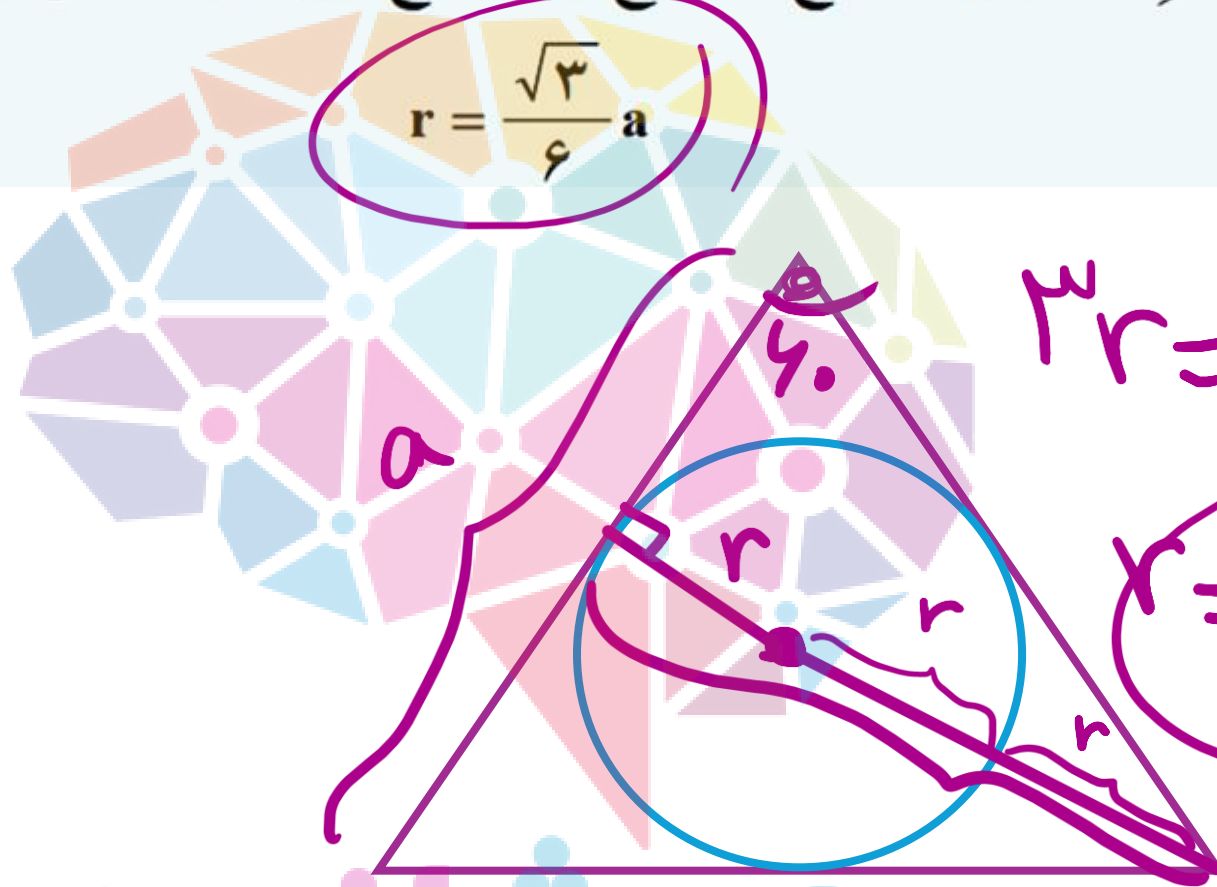
نکته در هر مثلث متساوی الاضلاع به ضلع a ، شعاع دایره‌ی محاطی برابر است با ثلث ارتفاع مثلث

یعنی:

$$r = \frac{\sqrt{3}}{6} a$$

$$r = \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{a}{2}$$

$$r = \frac{\sqrt{3}}{6} \times a$$



مفوشلند



در شکل زیر، ربع دایره در نقطه‌ی A بر خط $x+y=\sqrt{2}$ مماس است. حجم حاصل از دوران قسمت رنگی حول

محور عرض‌ها کدام است؟

- ۱ $\frac{2}{3}\pi(\sqrt{2}-1)$
- ۲ $\frac{2}{3}\pi(2+\sqrt{2})$
- ۳ $\frac{2}{3}\pi(2-\sqrt{2})$
- ۴ $\frac{2}{3}\pi(\sqrt{2}+1)$



حجم منفرجه - حجم فرد = حجم بدنه
از ۲ تا ۲

$$\frac{\sqrt{2} \times \pi \times \sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{\frac{2}{3}\pi - \frac{2}{3}\pi \times \sqrt{2}}{2} = \frac{2}{3}\pi(1-\sqrt{2})$$

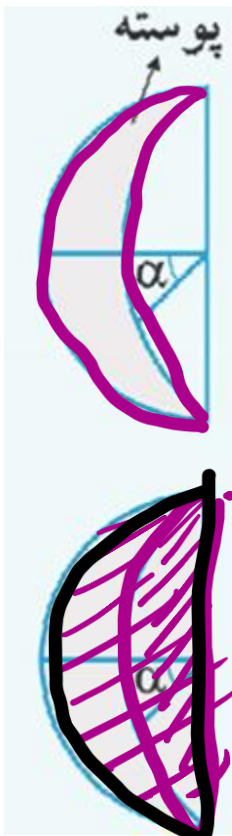


حجم و مساحت قاچ کروی

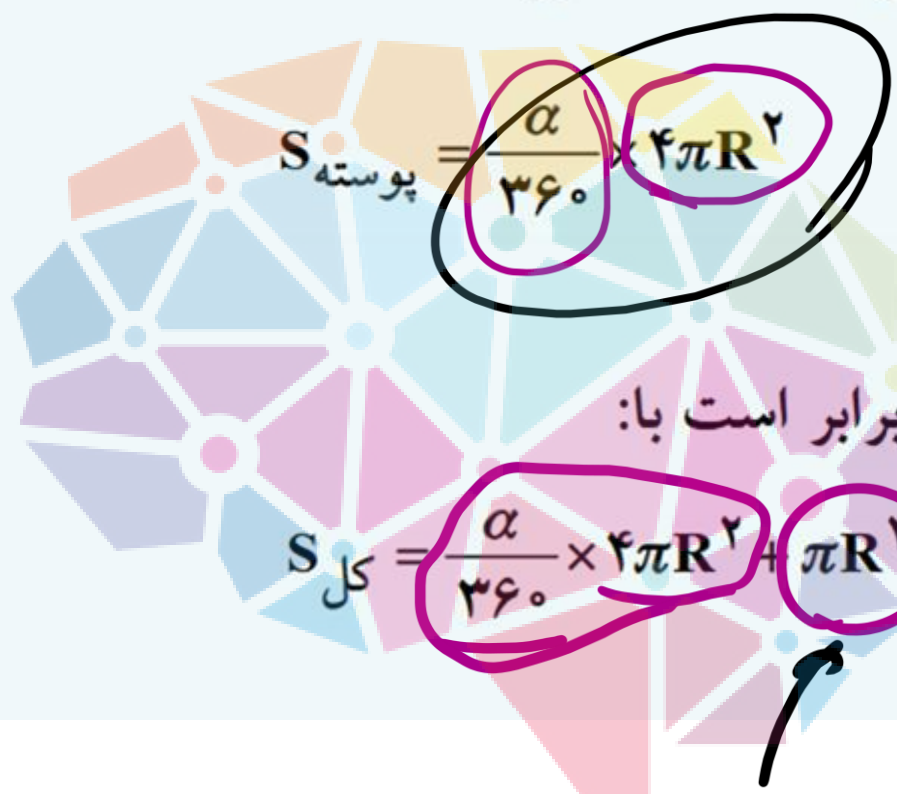
نکته به اندازه‌ی دوران نیم‌دایره حول قطرش به اندازه‌ی α درجه، جسمی به وجود می‌آید که به آن قاچ کروی می‌گویند. حجم قاچ کروی برابر است با:

$$V_{\text{قراچ کروی}} = \frac{\alpha}{360} \times \frac{4}{3} \pi R^3$$





نکته مساحت پوسته‌ی قاچ کروی به شعاع R و زاویه‌ی α برابر است با:



مساحت کل این قاچ کروی برابر است با:

$$S_{\text{کل}} = \frac{\alpha}{360} \times 4\pi R^2 + \pi R^2 = 1 \frac{\alpha}{90} \pi R^2$$

مفوشلند



مساحت کل جسمی که از دوران ۶۰ درجه‌ی ربع دایره‌ای به شعاع ۱۰ سانتی متر حول شعاعش به دست می‌آید چه قدر است؟

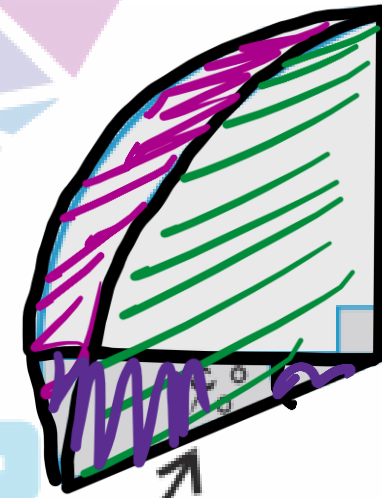
$$\frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{360} \times \pi R^2 \right) + \frac{\pi R^2}{2} + \frac{4}{360} \times \pi R^2$$

۳۱/۴ ①

۳۰۰ ②

۳۱۴ ③

۴۰۰ ④



قطوع ۶۰ درجه



۱۔ سوالات آزمون های سرگودگان و نمونه دولتی

۵ ساله (نکته - مرید + اینترنت)

۲۔ سوالات آزمون های ریاضی و تیرت تحصیلی میا

۵ ساله (اینترنت)

۳۔ دوره و تمرین مطالب اکو در کلاها

«خوشگند»

